CUPRINS

PREFAȚĂ 7

PARTEA ÎNTÂI
Analiză matematică

1. ȘIRURI DE NUMERE REALE 11
1.1. Considerații teoretice 11
1.2. Exerciții rezolvate 13
1.3. Exerciții propuse 19
1.4. Indicații și răspunsuri 21

2. SERII DE NUMERE 24
2.1. Considerații teoretice 24
2.2. Exerciții rezolvate 29
2.3. Exerciții propuse 40
2.4. Indicații și răspunsuri 45

3. SERII DE FUNCȚII. SERII DE PUTERI 52
3.1. Considerații teoretice 52
3.2. Exerciții rezolvate 57
3.3. Exerciții propuse 64
3.4. Indicații și răspunsuri 67

4. INTEGRALE IMPROPRII 70
4.1. Considerații teoretice 70
4.2. Exerciții rezolvate 73
4.3. Exerciții propuse 81
4.4. Indicații și răspunsuri 84

5. SPAȚIUL $\mathbb{R}^n$. LIMITE ȘI CONTINUITATE PENTRU FUNCȚII DE MAI MULTE VARIABILE 87
5.1. Considerații teoretice 87
5.2. Exerciții rezolvate 92
5.3. Exerciții propuse 98
5.4. Indicații și răspunsuri 101

Scanned with CamScanner

6. DERIVATE PARȚIALE. DIFERENȚIALE 103
6.1. Considerații teoretice 103
6.2. Exerciții rezolvate 109
6.3. Exerciții propuse 125
6.4. Indicații și răspunsuri 128

7. EXTREME. EXTREME CU LEGĂTURI 134
7.1. Considerații teoretice 134
7.2. Exerciții rezolvate 137
7.3. Exerciții propuse 143
7.4. Indicații și răspunsuri 144

8. INTEGRALE MULTIPLE. INTEGRALA DUBLĂ 146
8.1. Considerații teoretice 146
8.2. Exerciții rezolvate 149
8.3. Exerciții propuse 156
8.4. Indicații și răspunsuri 157

9. ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDINUL ÎNTÂI 160
9.1. Considerații teoretice 160
9.2. Exerciții rezolvate 162
9.3. Exerciții propuse 171
9.4. Indicații și răspunsuri 173

PARTEA A DOUA
Algebră liniară

10. SPAȚII VECTORIALE. DEPENDENȚĂ LINIARĂ 177
10.1. Considerații teoretice 177
10.1. Exerciții rezolvate 181
10.1. Exerciții propuse 190
10.4. Indicații și răspunsuri 193

11. FORME LINIARE. FORME PĂTRATICE 195
11.1. Considerații teoretice 195
11.2. Exerciții rezolvate 197
11.3. Exerciții propuse 202
11.4. Răspunsuri și indicații 204

Scanned with CamScanner

PARTEA A TREIA
Probabilități

12. CÂMP BORELIAN DE PROBABILITATE 209
12.1. Considerații teoretice 209
12.2. Exerciții rezolvate 219
12.3. Exerciții propuse 234
12.4. Indicații și răspunsuri 238

13. VARIABILE ALEATOARE. FUNCȚIA DE REPARTIȚIE .. 243
13.1. Considerații teoretice 243
13.2. Exerciții rezolvate 248
13.3. Exerciții propuse 258
13.4. Indicații și răspunsuri 262

14. CARACTERISTICI NUMERICE ALE VARIABILELOR ALEATOARE 267
14.1. Considerații teoretice 267
14.2. Exerciții rezolvate 270
14.3. Exerciții propuse 278
14.4. Indicații și răspunsuri 280

15. VECTORI ALEATORI. CORELAȚIE 282
15.1. Considerații teoretice 282
15.2. Exerciții rezolvate 285
15.3. Exerciții propuse 296
15.4. Indicații și răspunsuri 298

16. FUNCȚIA CARACTERISTICĂ. FUNCȚIA GENERATOARE DE MOMENTE 300
16.1. Considerații teoretice 300
16.2. Exerciții rezolvate 302
16.3. Exerciții propuse 307
16.4. Indicații și răspunsuri 308

17. REPARTIȚII CLASICE 310
17.1. Considerații teoretice 310
17.2. Exerciții rezolvate 313
17.3. Exerciții propuse 317
17.4. Indicații și răspunsuri 318

BIBLIOGRAFIE 319

Scanned with CamScanner

PREFAȚĂ

Prin aplicațiile sale, matematica a pătruns în diverse domenii ale activității umane. Nu exagerăm dacă afirmăm că practic nu există domeniu de cunoaștere, de cercetare, în care matematica să nu-și fi adus o contribuție însemnată.

Desigur, *domeniul economic* cu multiplele sale implicații este unul foarte important. Aici se folosesc concepte și tehnici de lucru ale matematicii de foarte mult timp, ceea ce a permis și astăzi abordarea, tratarea și modelarea fenomenelor economice cu ajutorul mijloacelor moderne ale matematicii.

Astfel, noțiunile cunoscute de *funcție* (*de mai multe variabile*), *limită, continuitate, derivate, integrale* sunt folosite pentru a evidenția o serie de aspecte legate de studiul și comportarea anumitor fenomene economice. Deseori se întâlnesc situații în care sunt necesare determinările unor valori maxime sau minime pentru funcții de mai multe variabile cu substrat economic.

Nu puține sunt cazurile în care întâmplările, hazardul își pun amprenta pe desfășurarea în timp a proceselor și fenomenelor economice.

Evidențierea acestor aspecte este pe cât de necesară pe atât de utilă.

Noțiunile de *eveniment, probabilitate, variabile aleatoare*, caracteristici numerice ale acestora, precum și comportările rezultate ca urmare a proceselor de trecere la limită, fac iarăși obiectul de studiu al acestei cărți. Și aici, de fiecare dată, exemplificările sunt prezente.

Considerăm că materialul conținut în această carte va fi util personalului implicat în diverse activități legate de domeniul economic, studenților anului I de la facultățile de științe economice dar și celor de la facultățile tehnice atât de stat cât și particulare.

Tematica matematicilor aplicate în economie fiind extrem de vastă, mulțumim anticipat celor care vor veni cu observații și sugestii de îmbunătățire conștienți fiind că o cuprindere integrală a acestei problematici este aproape imposibil de realizat.

Nu în ultimul rând, publicarea acestei cărți nu ar fi fost posibilă fără colaborarea noastră cu domnul profesor universitar doctor Gabriel V. Orman, căruia îi mulțumim.

Autorii

Scanned with CamScanner

PARTEA ÎNTÂI

Analiză matematică

Scanned with CamScanner

1. ŞIRURI DE NUMERE REALE

1.1. Consideraţii teoretice

A. DEFINIŢII

Definiţia 1. Se numeşte ***şir de numere reale*** o aplicaţie $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$. Notăm valorile ei prin

$$f(n)=a_n,\ n\in\mathbb{N}.$$

Definiţia 2. Un şir (a_n) se numeşte ***mărginit*** dacă $\exists\ M>0$ astfel încât $|a_n|\leq M$, $\forall\ n\in\mathbb{N}$.

Definiţia 3. Un şir (a_n) se numeşte ***monoton crescător*** dacă $a_n\leq a_{n+1}$, $\forall\ n\in\mathbb{N}$ şi ***monoton descrescător*** dacă $a_n\geq a_{n+1}$, $\forall\ n\in\mathbb{N}$.

Definiţia 4. Şirul (a_n) se numeşte ***convergent*** dacă $\exists\ a\in\mathbb{R}$ astfel încât

$$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N(\varepsilon)\in\mathbb{N}: |a_n|<\varepsilon\ \forall\ n>N(\varepsilon).$$

Scriem în acest caz $a_n\to a$ sau $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Definiţia 5. Spunem că şirul (a_n) ***tinde la*** ∞ şi notăm $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, dacă

$$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N(\varepsilon)\in\mathbb{N}: a_n>\varepsilon\ \forall\ n>N(\varepsilon),$$

şi spunem că şirul (a_n) ***tinde la*** $-\infty$ şi notăm $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, dacă

$$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N(\varepsilon)\in\mathbb{N}: a_n<-\varepsilon\ \forall\ n>N(\varepsilon).$$

Definiţia 6. Spunem că şirul (a_n) este ***divergent*** dacă el nu este convergent.

Definiţia 7. Un şir (a_n) se numeşte ***fundamental*** (***şir Cauchy***) dacă

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N(\varepsilon)\in\mathbb{N}: |a_m-a_n|<\varepsilon\ \forall\ m,n>N(\varepsilon)$ sau echivalent

$$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N(\varepsilon)\in\mathbb{N}: |a_{n+p}-a_n|<\varepsilon\ \forall\ n>N(\varepsilon),\ \forall\ p.$$

Scanned with CamScanner

B. PROPRIETĂȚI

1. Dacă $a_n \to a$, atunci $|a_n| \to |a|$.
2. Orice şir convergent este mărginit.
3. Orice şir convergent are o singură limită.
4. Orice subşir al unui şir convergent este convergent la aceeaşi limită.
5. Dacă $a_n \to a$ şi $b_n \to b$, $a_n \le b_n$ $\forall$ n atunci $a \le b$.
6. Dacă $a_n \to a$ şi $c_n \to a$, $a_n \le b_n \le c_n$ $\forall$ n atunci $b_n \to a$ (*teorema cleştelui*).
7. Dacă $|a_n - a| \le b_n$ şi $b_n \to 0$ atunci $a_n \to a$.
8. Dacă $a_n \to 0$ şi $|b_n| \le M$ $\forall$ n atunci $a_n b_n \to 0$.

C. TEOREME

Criteriul general al lui Cauchy

Un şir este convergent dacă şi numai dacă este fundamental.

Teorema lui Weierstrass

Orice şir monoton are limită. Dacă este şi mărginit atunci este convergent.

Criteriul lui Stolz

Fie şirul (b_n) monoton crescător cu $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$. *Atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$, *în ipoteza că a doua limită există.*

Criteriul radicalului

Fie şirul (a_n) de numere pozitive. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, *în ipoteza că a doua limită există.*

Scanned with CamScanner

D. LIMITE IMPORTANTE

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}\right) = e$;

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx$, unde $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ este o funcție continuă.

1.2. Exerciții rezolvate

1. *Să se calculeze limitele următoarelor șiruri:*

a. $x_n = \frac{1}{n}\left(\frac{a+b}{c+d}+\frac{a\sqrt{2}+b}{c\sqrt{2}+d}+...+\frac{a\sqrt{n}+b}{c\sqrt{n}+d}\right)$ $a,b,c,d>0$;

b. $x_n = \frac{1^p+2^p+...+n^p}{n^{p+1}}$, $p\in N$;

c. $x_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$;

d. $x_n = \sqrt[n]{n!\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{3}...\sin\frac{\pi}{n}}$;

e. $x_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k}$;

f. $x_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{\sin k}{n^2+k}$;

g. $x_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}$;

Scanned with CamScanner

h. $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}$.

Rezolvări:

a. Aplicăm criteriul lui Stolz şirurilor $a_n = \dfrac{a+b}{c+d} + \dfrac{a\sqrt{2}+b}{c\sqrt{2}+d} + \ldots + \dfrac{a\sqrt{n}+b}{c\sqrt{n}+d}$ şi $b_n = n$. Evident $b_n \le b_{n+1}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$. Avem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{a\sqrt{n+1}+b}{c\sqrt{n+1}+d}}{n+1-n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a+\dfrac{b}{\sqrt{n+1}}}{c+\dfrac{d}{\sqrt{n+1}}} = \frac{a}{c},$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{a}{c}$.

b. Aplicăm criteriul lui Stolz şirurilor $a_n = 1^p + 2^p + \ldots + n^p$ şi $b_n = n^{p+1}$. Evident $b_n \le b_{n+1}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$. Avem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^p + C_p^1 n^{p-1} + \ldots + 1}{n^{p+1} + C_{p+1}^1 n^p + \ldots + 1 - n^{p+1}} = \frac{1}{C_{p+1}^1} = \frac{1}{p+1}$$

c. Folosim criteriul radicalului cu $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$. Avem

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$$

Scanned with CamScanner

d. Folosim criteriul radicalului cu $a_n = n!\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{3}\ldots\sin\frac{\pi}{n}$. Avem

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}(n+1)\sin\frac{\pi}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n+1}}{\frac{\pi}{n+1}}\pi = \pi,$$

deoarece $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

e. În teorema cleştelui considerăm

$$a_n = \frac{1}{n^2+n} + \frac{2}{n^2+n} + \ldots + \frac{n}{n^2+n},$$

$$c_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+1} + \ldots + \frac{n}{n^2+1} \quad \text{şi} \quad b_n = x_n.$$

Evident $a_n \le b_n \le c_n$, iar

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\ldots+n}{n^2+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n)} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\ldots+n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+1)} = \frac{1}{2}.$$

Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$.

f. În teorema cleştelui luăm $a_n = 0$, $c_n = \frac{n}{n^2+1}$ şi $b_n = |x_n|$. Avem

$$0 \le |x_n| = \left|\frac{\sin 1}{n^2+1} + \frac{\sin 2}{n^2+2} + \ldots + \frac{\sin n}{n^2+n}\right| \le \left|\frac{\sin 1}{n^2+1}\right| + \ldots + \left|\frac{\sin n}{n^2+n}\right| \le$$

$$\le \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \ldots + \frac{1}{n^2+n} \le$$

$$\le \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+1} + \ldots + \frac{1}{n^2+1} = \frac{n}{n^2+1},$$

Scanned with CamScanner

deci $a_n \le b_n \le c_n$. Cum $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 0$, rezultă că $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, adică $x_n \to 0$.

g. Şirul se poate pune sub forma $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, unde $f(x) = \frac{1}{1+x}$:

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \ldots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}.$$

Rezultă că $\lim_{n\to\infty} x_n = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \ln|1+x|\Big|_0^1 = \ln 2$.

h. Avem

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} =$$

$$= \frac{1}{n}\left[\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}}.$$

Deci $\lim_{n\to\infty} x_n = \int_0^1 f(x)dx$, unde $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, adică

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^1 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

Scanned with CamScanner

2. *Utilizând criteriul general al lui Cauchy să se studieze convergența șirurilor*:

a. $a_n = \frac{\cos x}{2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \ldots + \frac{\cos nx}{2^n}$;

b. $a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$;

c. $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$;

d. $a_n = \sin n$.

Rezolvări:

a. Avem

$$|a_{n+p} - a_n| = \left|\frac{\cos x}{2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \ldots + \frac{\cos nx}{2^n} + \frac{\cos(n+1)x}{2^{n+1}} + \ldots + \right.$$
$$\left. + \frac{\cos(n+p)x}{2^{n+p}} - \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 2x}{2^2} - \ldots - \frac{\cos nx}{2^n}\right| =$$
$$= \left|\frac{\cos(n+1)x}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{\cos(n+p)x}{2^{n+p}}\right| \leq \frac{1}{2^{n+1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{p-1}}\right) =$$
$$= \frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2^p}\right) \leq \frac{1}{2^n}$$

Dar $\frac{1}{2^n} < \varepsilon \forall n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}, \forall p \in \mathbb{N}$, deci

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon \forall n > N(\varepsilon) = \left[\log_2 \frac{1}{\varepsilon}\right] + 1, \forall p,$$

adică șirul este fundamental și implicit convergent din criteriul general al lui Cauchy.

b. Avem $|a_{n+p} - a_n| = \left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + (-1)^p \frac{1}{n+p}\right|$. Dacă p este par, atunci

$$|a_{n+p} - a_n| = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right) =$$

Scanned with CamScanner

$$=\frac{1}{n+1}-\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)-\ldots-\left(\frac{1}{n+p-2}-\frac{1}{n+p-1}\right)-\frac{1}{n+p}<$$

$$<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}.$$

Dacă p este impar atunci

$$|a_{n+p}-a_n|=\frac{1}{n+1}-\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)-\ldots-\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)<$$

$$<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}.$$

Deci $|a_{n+p}-a_n|<\frac{1}{n}\forall p\in\mathbb{N}$, adică

$$|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon\forall n>N(\varepsilon)=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1\forall p\in\mathbb{N}.$$

Rezultă că (a_n) este un şir fundamental şi deci convergent.

c. Avem $|a_{n+p}-a_n|=\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n+p}}$.

Pentru $p=n$ obţinem

$$|a_{n+p}-a_n|=\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n}}>n\frac{1}{\sqrt{2n}}=\sqrt{\frac{n}{2}}\geq\sqrt{\frac{1}{2}}$$

ceea ce contrazice definiţia şirului fundamental ($\exists\varepsilon=\sqrt{\frac{1}{2}}$ astfel încât $\forall n\in\mathbb{N}\ \exists p\in\mathbb{N}$ cu $|a_{n+p}-a_n|\geq\varepsilon$), deci (a_n) nu poate fi şir convergent.

d. Presupunem că $a_n\to a$. Atunci (a_n) este un şir fundamental şi pentru p=2 avem $\lim\limits_{n\to\infty}|a_{n+p}-a_n|=0$, adică $\lim\limits_{n\to\infty}[\sin(n+1)-\sin(n-1)]=0$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty}2\sin 1\cos n=0$ şi deci $\lim\limits_{n\to\infty}2\sin n\cos n=0$, adică $\lim\limits_{n\to\infty}\sin 2n=0$. Cum $\sin 2n$ este un subşir al lui $\sin n$, rezultă că a=0. Dar $\sin^2 n+\cos^2 n=1$ şi prin trecere la limită obţinem 0+0=1, contradicţie, deci şirul (a_n) nu este convergent.

Scanned with CamScanner

1.3. Exerciții propuse

1. *Să se calculeze limitele următoarelor şiruri:*

a. $x_n = \dfrac{1+2^2\sqrt{2}+3^2\sqrt[3]{3}+...+n^2\sqrt[n]{n}}{n(n+1)(2n+1)}$;

b. $x_n = \dfrac{1+2^2+3^3+...+n^n}{n^n}$;

c. $x_n = \dfrac{1+2^p+...+n^p}{n^p} - \dfrac{n}{p+1}$, $p \in \mathbb{N}$;

d. $x_n = \dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}}{\ln n}$, $n > 0$;

e. $x_n = \dfrac{1+4+4^2+...+4^n}{n!}$;

f. $x_n = \dfrac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt[3]{n}}$;

g. $x_n = \dfrac{\frac{n}{1}\ln 2+\frac{n-1}{2}\ln 3+...+\frac{1}{n}\ln(n+1)}{n\ln 2+(n-1)\ln 3+...+1\ln(n+1)}$;

h. $x_n = \dfrac{(\ln 2)^2+(\ln 3)^2+...+(\ln n)^2}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$;

i. $x_n = \sqrt[n]{\dfrac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}}$;

j. $x_n = \sqrt[n]{\dfrac{(a+1)(a+2)...(a+n)}{n!}}$, $a > 0$;

k. $x_n = \sqrt[n]{1+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}}$;

Scanned with CamScanner

l. $x_n = \sqrt[n]{n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$;

m. $x_n = \sqrt[n]{\ln(n!)}$;

n. $x_n = \sqrt[n]{C_n^1 C_n^2 \ldots C_n^n}$;

o. $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{2}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$;

p. $x_n = \frac{1}{n}\ln\left(a^{\frac{n}{1}} + a^{\frac{n}{2}} + \ldots + a^{\frac{n}{n}}\right)$, $a > 0$;

q. $x_n = \sqrt[n]{1^n + 2^n + \ldots + n^n}$;

r. $x_n = \frac{\left(1+\sqrt{1}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)\ldots\left(1+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n!}}$;

s. $x_n = \sqrt[n]{1^{1999} + 2^{1999} + \ldots + n^{1999}}$;

t. $x_n = \frac{1}{C_n^1} + \frac{1}{C_n^2} + \ldots + \frac{1}{C_n^n}$;

u. $x_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2}$;

v. $x_n = \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n^2}$.

2. *Să se studieze convergenţa şirurilor*:

a. $a_n = \frac{\sin x}{1\cdot 4} + \frac{\sin 2x}{4\cdot 7} + \ldots + \frac{\sin nx}{(3n-2)(3n+1)}$;

b. $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$;

c. $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$;

Scanned with CamScanner

d. $a_n = \frac{1}{4+1} + \frac{2}{4^2+1} + \ldots + \frac{n}{4^n+1}$;

e. $a_n = 1 + \frac{1}{\ln 2} + \ldots + \frac{1}{\ln n}$;

f. $a_n = \cos n$;

g. $a_n = \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 6} + \ldots + \frac{1}{(n+1)(n+4)}$;

h. $a_n = \frac{2}{1} + \frac{3}{3} + \ldots + \frac{2+n}{2n+1}$;

i. $a_n = \frac{\text{arctg } 1!}{1\cdot 2} + \frac{\text{arctg } 2!}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{\text{arctg } n!}{n(n+1)}$.

1.4. Indicații şi răspunsuri

1. a. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{2n+1}\sqrt{n+1}}{(n+1)[(n+2)(2n+3)-n(2n+1)]} = \frac{1}{6};$$

b. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}-n^n} = 1$;

c. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(p+1)(n+1)^p-(n+1)^{p+1}+n^{p+1}}{(p+1)[(n+1)^p-n^p]} = \frac{1}{2}$;

d. $l = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 1$;

e. $l = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}}{n\cdot n!} = 0$;

Scanned with CamScanner

f. $l=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt{n+1}}=\infty$;

g. $l=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\ln 2+\frac{1}{2}\ln 3+...+\frac{1}{n+1}\ln(n+2)}{\ln 2+\ln 3+...+\ln(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n+2}\ln(n+3)}{\ln(n+3)}=0$;

h. $l=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\ln^2(n+1)}{(n+1)^a-n^a}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\ln^2(n+1)}{n^a\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^a-1\right]}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\ln^2(n+1)}{\alpha n^{\alpha-1}}=$

$=\dfrac{1}{\alpha}\lim_{n\to\infty}\dfrac{\ln^2(n+1)}{n^{\alpha-1}}$

$l=\infty$ dacă $\alpha\in(0,1]$ şi l=0 dacă $\alpha>1$;

i. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{3^3(n+1)^3}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}=1$;

j. analog punctului precedent $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a+n+1}{n+1}=1$;

k. $l=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+...+\sqrt{n+1}}{1+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}}=1$;

l. $l=\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=1$;

m. $l=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\ln(n+1)!}{\ln n!}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)}=1$;

n. $l=\lim_{n\to\infty}\dfrac{C_{n+1}^1}{C_n^1}\cdot\dfrac{C_{n+1}^2}{C_n^2}\cdot...\cdot\dfrac{C_{n+1}^n}{C_n^n}\geq\lim_{n\to\infty}\dfrac{C_{n+1}^n}{C_n^n}=\infty$;

o. $x_n\geq\dfrac{1+2+...+n}{\sqrt{n^2+n}}\to\infty$;

Scanned with CamScanner

p. $l = 0, \quad a \in (0,1]; \quad l = \ln a, \quad a > 1;$

q. $x_n \geq n \to \infty;$

r. $l = \infty;$

s. $l = 1;$

t. $l = 2;$

u. $l = \dfrac{1}{2};$

v. $l = \dfrac{\pi}{4}.$

2. **a.** $$|a_{n+p} - a_n| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{3} \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1} \right) <$$
$$< \frac{1}{3(3n+1)} < \frac{1}{n} \quad \forall p \text{, convergent;}$$

b. $$|a_{n+p} - a_n| = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots + \frac{1}{(n+p)!} <$$
$$< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} =$$
$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} \quad \forall p \text{, convergent;}$$

c. $$|a_{2n} - a_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2} \quad \forall n \text{, divergent;}$$

d. convergent; **e.** divergent; **f.** divergent; **g.** convergent;

h. divergent; **i.** convergent.

Scanned with CamScanner

2. SERII DE NUMERE

2.1. Considerații teoretice

I. SERII

A. DEFINIȚII

Definiția 1. Fie (a_n) un şir de numere reale şi $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Dacă există $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, putem defini expresia (numită ***serie***)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

prin

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

Definiția 2. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se numeşte ***convergentă*** dacă şirul (S_n) este convergent, iar limita S a şirului (S_n) se numeşte ***suma seriei***.

Definiția 3. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se numeşte ***divergentă*** dacă şirul (S_n) nu are limită sau are limită infinită.

B. TEOREME

Criteriul general al lui Cauchy

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă dacă şi numai dacă şirul sumelor parțiale (S_n) este fundamental, adică

Scanned with CamScanner

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)\in \mathbb{N} : | a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p} | < \varepsilon\ \forall n > N(\varepsilon)\ \forall p\in \mathbb{N}.$$

Observații:

1. A determina natura unei serii înseamnă a stabili dacă este convergentă sau divergentă.
2. Dacă la o serie se adaugă sau se scoate un număr finit de termeni, se obține o nouă serie de aceeaşi natură.
3. Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă, şirul sumelor parțiale este mărginit.
4. Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă. şirul (a_n) este convergent la zero.

II. SERII CU TERMENI POZITIVI

A. DEFINIȚII

Definiția 1. O serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se numeşte ***cu termeni pozitivi*** dacă $a_n > 0\ \forall n$.

Şirul sumelor parțiale ale unei astfel de serii este strict crescător, deci ea este convergentă dacă şi numai dacă şirul sumelor parțiale este mărginit superior.

B. SERII REMARCABILE

1. *Seria geometrică* $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ este convergentă pentru $|q|<1$ şi divergentă în rest.
2. *Seria armonică generalizată* (*Riemann*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ este convergentă pentru $p>1$ şi divergentă pentru $p\leq 1$.

Scanned with CamScanner

3. Seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ este convergentă şi are suma e.

C. CRITERII DE COMPARAŢIE

1. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ două serii cu termeni pozitivi astfel încât $a_n \le b_n \ \forall n \ge \mathbb{N}$.

a. Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

b. Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este divergentă.

2. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ două serii cu termeni pozitiv astfel încât $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n} \ \forall n \ge \mathbb{N}$.

a. Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

b. Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este divergentă.

3. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ două serii cu termeni pozitivi astfel încât $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$. Dacă $0<l<\infty$, atunci cele două serii au aceeaşi natură.

Scanned with CamScanner

Criteriul raportului (D'Alembert)

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *o serie cu termeni pozitivi.*

a. *Dacă* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le k < 1 \ \forall n > \mathbb{N}$, *atunci seria este convergentă.*

b. *Dacă* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1 \ \forall n > \mathbb{N}$, *atunci seria este divergentă.*

c. *Dacă* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, *atunci:*

- *pentru* $l<1$ *seria este convergentă;*
- *pentru* $l>1$ *seria este divergentă.*

Criteriul rădăcinii (Cauchy)

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *o serie cu termeni pozitivi.*

a. *Dacă* $\sqrt[n]{a_n} \le k < 1 \ \forall n > \mathbb{N}$, *atunci seria este convergentă.*

b. *Dacă* $\sqrt[n]{a_n} \ge 1 \ \forall n > \mathbb{N}$, *atunci seria este divergentă.*

c. *Dacă* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, *atunci:*

- *pentru* $l<1$ *seria este convergentă;*
- *pentru* $l>1$ *seria este divergentă.*

Criteriul lui Raabe şi Duhamel

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *o serie cu termeni pozitivi.*

a. *Dacă* $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \ge k > 1 \ \forall n > \mathbb{N}$, *atunci seria este convergentă.*

Scanned with CamScanner

b. *Dacă* $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\leq 1\ \forall n>\mathbb{N}$, *atunci seria este divergentă.*

c. *Dacă* $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=l$, *atunci:*

- *pentru l>1 seria este convergentă;*
- *pentru l<1 seria este divergentă.*

Criteriul logaritmic

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *o serie cu termeni pozitivi.*

a. *Dacă* $-\frac{\ln a_n}{\ln n}\geq k>1\ \forall n>\mathbb{N}$, *atunci seria este convergentă.*

b. *Dacă* $-\frac{\ln a_n}{\ln n}\leq 1\ \forall n>\mathbb{N}$, *atunci seria este divergentă.*

c. *Dacă* $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-\ln a_n}{\ln n}\right)=l$ *atunci:*

- *pentru l>1 seria este convergentă;*
- *pentru l<1 seria este divergentă.*

III. SERII ALTERNANTE

A. DEFINIȚII

Definiția 1. O serie de forma $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n, a_n>0\forall n$, se numeşte ***serie alternantă***.

Definiția 2. O serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se numeşte ***semiconvergentă*** dacă este

Scanned with CamScanner

convergentă, iar $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ este divergentă. Dacă $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ este convergentă, seria se numeşte ***absolut convergentă***.

B. CRITERII DE CONVERGENȚĂ

Criteriul lui Leibniz

Dacă şirul (a_n) este descrescător şi convergent la zero, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ este convergentă.

Criteriu

Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ este convergentă şi $a_n > 0 \forall n$, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ este convergentă.

2.2. Exerciții rezolvate

1. *Să se stabilească natura seriilor următoare, calculând* $\lim_{n\to\infty} S_n$ *sau* $\lim_{n\to\infty} a_n$:

a. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2^n}$;

b. $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$;

c. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$;

d. $\sum_{n=1}^{\infty} arctg\frac{1}{n^2+n+1}$;

Scanned with CamScanner

e. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+4^n}{3^{n+1}+4^{n+1}}$;

f. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{(n+2)!}$.

Rezolvări:

a. Calculăm S_n şi apoi $\lim_{n\to\infty} S_n$:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{3}\cdot\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right];$$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{3}$. Deci seria este convergentă şi are suma $S = \frac{1}{3}$.

b. Avem

$$S_n = \sum_{k=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^{n+1}[\ln(k+1)+\ln(k-1)-2\ln k] =$$

$$= \ln(n+2) - \ln(n-1) - \ln 2 = \ln\frac{n+2}{2(n-1)}$$

şi

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2,$$

adică seria este convergentă şi are suma $S = -\ln 2$.

c. Avem

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right) = \sqrt{1}-\sqrt{0}+\sqrt{2}-\sqrt{1}+\ldots+$$

$$+\sqrt{n-1}+\ldots+\sqrt{n-1}-\sqrt{n-2}+\sqrt{n}-\sqrt{n-1} = \sqrt{n},$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty,$$

Scanned with CamScanner

adică seria este divergentă.

d. Avem

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{arctg}\frac{1}{k^2+k+1} = \sum_{k=1}^{n}\left[\operatorname{arctg}\frac{1}{k} - \operatorname{arctg}\frac{1}{k+1}\right] =$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{1}{1} - \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \ldots + \operatorname{arctg}\frac{1}{n-1} - \operatorname{arctg}\frac{1}{n} +$$

$$+ arctg\frac{1}{n} - arctg\frac{1}{n+1} = \frac{\pi}{4} - arctg\frac{1}{n+1}, \ \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\pi}{4}.$$

Avem o serie convergentă cu suma $\frac{\pi}{4}$.

e. Calculăm $\lim_{n\to\infty} a_n$, întrucât nu se mai poate calcula S_n:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{3^n+4^n}{3^{n+1}+4^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^n\left[\left(\frac{3}{4}\right)^n+1\right]}{4^{n+1}\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}+1\right]} = \frac{1}{4},$$

deci $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, de unde rezultă că seria este divergentă.

f. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{(n+2)!} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n!} - \frac{3}{(n+1)!} + \frac{5}{(n+2)!}\right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!} - 3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!} + 5\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)!} =$$

$$= e - \frac{1}{0!} - 3\left(e - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!}\right) + 5\left(e - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) = 3e - 5 - \frac{5}{2},$$

deci seria este convergentă.

2. *Utilizând criteriile de comparație, să se stabilească natura următoarelor serii:*

Scanned with CamScanner

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+n}}$;

b. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{a}{4^n}, 0 \le a < 2\pi$;

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^n+n}, q > 0$;

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(2n-1)^p} - \frac{1}{(2n)^p}\right], p \in \mathbb{R}$;

e. $\sum_{n=2}^{\infty} \left(2-\sqrt{e}\right)\left(2-\sqrt[3]{e}\right)\ldots\left(2-\sqrt[n]{e}\right)$.

Rezolvări:

a. Avem $\frac{1}{\sqrt{n^3+n}} < \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n^{3/2}}$. Cum seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ este o serie armonică convergentă (p=3/2), rezultă că şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+n}}$ este convergentă (din criteriul I de comparație).

b. Comparăm cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{2^n}$: $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n \sin\frac{a}{4^n}}{\frac{a}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{a}{4^n}}{\frac{a}{4^n}} = 1 \in (0,\infty)$.

Din criteriul III de comparaţie rezultă că cele două serii au aceeaşi natură. Cum $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{2^n}$ este o serie geometrică cu $q = \frac{1}{2} < 1$ deci convergentă, rezultă că şi seria noastră este convergentă.

c. Dacă $0 \le q \le 1$ comparăm cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, iar dacă q>1 comparăm cu

Scanned with CamScanner

seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^n}$. Avem în primul caz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{q^n+n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{q^n+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{q^n}{n}+1} = 1 \in (0,\infty),$$

iar în al doilea caz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{q^n+n}}{\frac{1}{q^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{q^n+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{n}{q^n}} = 1 \in (0,\infty).$$

Deci seriile au aceeaşi natură. Cum seria armonică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă, iar seria geometrică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^n} \, (q>1)$ este convergentă, obținem pentru $0 \le q \le 1$ o serie divergentă, iar pentru $q>1$ o serie convergentă.

d. Avem

$$\frac{1}{(2n-1)^p} - \frac{1}{(2n)^p} = \frac{1}{(2n)^p}\left[\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^p - 1\right] = \frac{1}{(2n)^p}\left[\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^p - 1\right].$$

Comparăm cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^p} \frac{p}{2n-1}$ sau $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p}{n^{p+1}}$. Deci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(2n)^p}\left[\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^p - 1\right]}{\frac{p}{n^{p+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^p - 1}{\frac{1}{2n-1}} \cdot \frac{1}{p2^p} \cdot \frac{n}{2n-1} =$$

$$= \frac{1}{2^{p+1}} \in (0,\infty),$$

deci seriile au aceeaşi natură (criteriul III). Dar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p}{n^{p+1}}$ este o serie armonică

Scanned with CamScanner

convergentă pentru $p \geq 0$ şi divergentă pentru $p<0$.

e. Avem

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=2-\sqrt[n+1]{e}=2-e^{\frac{1}{n+1}}\geq 2-\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right]^{\frac{1}{n+1}}=1-\frac{1}{n}=$$

$$=\frac{n-1}{n}=\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1}}=\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Cum $\sum_{n=2}^{n}\frac{1}{n-1}$ este divergentă, rezultă din criteriul II că şi seria noastră este divergentă.

3. *Folosind criteriul raportului sau rădăcinii să se stabilească natura următoarelor serii:*

a. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}$;

b. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n$;

c. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n^2+1}}$;

d. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n\cdot n!}{n^n}, a>0$;

e. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sqrt{(n+1)(n+a)}-n\right]^n, a>0$;

f. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n+a^n}, a>0$.

Scanned with CamScanner

Rezolvări:

a. Avem $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)3^n}{(2n-1)3^{n+1}}=\frac{1}{3}<1$, deci seria este convergentă.

b. Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)=0<1$, seria este convergentă.

c. $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}}\cdot\sqrt{\frac{n+1}{1+\frac{1}{n}}}=\frac{1}{e^2}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\frac{1}{e^2}<1,$$

deci seria este convergentă.

d. Avem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{a^n\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{a(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}}=$$

$$=a\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{a}{e}$$

Pentru $a<e$ seria este convergentă, iar pentru $a>e$ seria este divergentă. Dacă $a=e$ avem $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\geq 1$, deci seria este divergentă.

e. $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{(n+1)(n+a)}-n\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n(a+1)+a}{\sqrt{(n+1)(n+a)}+n}=\frac{a+1}{2}.$$

Aşadar seria este convergentă pentru $\frac{a+1}{2}<1$, adică $a<1$ şi divergentă pentru $a>1$. Dacă $a=1$ obţinem

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}1$ care este divergentă ($\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$).

Scanned with CamScanner

f. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+a^n)}{n+1+a^{n+1}}$.

Dacă $a\in(0,1]$ rezultă $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=2$ deci seria este divergentă, iar dacă $a>1$ rezultă $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2}{a}$, adică seria este convergentă pentru $a>2$ şi divergentă pentru $a\in(1,2)$. Dacă $a=2$ obţinem $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n+2^n}$ care este divergentă ($\lim_{n\to\infty}a_n=1\neq 0$).

4. *Folosind criteriul Raabe-Duhamel sau logaritmic, să se stabilească natura următoarelor serii:*

a. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{4^n\cdot(n!)^2}$;

b. $\sum_{n=1}^{\infty}(n^2+1)^{2\ln x}, x>0$;

c. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{a(a+1)...(a+n-1)}, a>0$;

d. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n\cdot n!}{n^n}$;

e. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+...+\sqrt[n]{n}}$;

f. $\sum_{n=1}^{\infty}a^{\ln(n^2+1)}, a>0$.

Rezolvări:

a. Avem

Scanned with CamScanner

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{4(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}-1\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+2n}{4n^2+6n+2}=\frac{1}{2}<1$$

deci seria este divergentă.

b. $$-\lim_{n\to\infty}\frac{\ln a_n}{\ln n}=-\lim_{n\to\infty}\frac{2\ln x\ln(n^2+1)}{\ln n}=-2\ln x\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n^2+1)}{\ln n}=-4\ln x\,.$$

Seria este convergentă dacă $-4\ln x>1$ şi divergentă dacă $-4\ln x<1$. Obţinem în primul caz $x<1/\sqrt[4]{e}$ şi în al doilea $x>1/\sqrt[4]{e}$. Dacă $x=1/\sqrt[4]{e}$ obţinem seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ care este divergentă din comparaţia cu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

c. $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a+n}{n+1}-1\right)=a-1$. Seria este convergentă pentru $a>1$. Dacă $a=2$ obţinem $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1'}{n+1}$ care este divergentă.

d. $$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=n\left[\frac{(n+1)^n}{e\cdot n^n}-1\right]=n\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}-1\right]<n(1-1)=0<1,$$ deci seria este divergentă.

e. $$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\frac{n^{n+1}\sqrt{n+1}}{1+\sqrt{2}+...+\sqrt[n]{n}}\geq\frac{n^{n+1}\sqrt{n+1}}{n\sqrt[n]{n}}=\frac{^{n+1}\sqrt{n+1}}{\sqrt[n]{n}}<1,$$ deci seria este divergentă.

f. $$-\lim_{n\to\infty}\frac{\ln a_n}{\ln n}=-\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n^2+1)\ln a}{\ln n}=-2\ln a\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n^2+1)}{\ln n}=-2\ln a\,.$$

Scanned with CamScanner

Dacă -2ln$a$>1, adică $a < e^{\frac{1}{2}}$, seria este convergentă, iar dacă $a > e^{\frac{1}{2}}$ seria este divergentă. Pentru $a = e^{\frac{1}{2}}$ obținem $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ care este divergentă (o comparăm cu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$).

5. *Să se stabilească convergența absolută și semiconvergența următoarelor serii:*

a. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$;

b. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin\frac{a}{n^2}, 0 < a < \pi$;

c. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\sqrt[3]{n}}{n+\sqrt{2}}$;

d. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{a+\frac{1}{n}}}, a \in \mathbb{R}$;

e. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1+a^{2n}}, a \in \mathbb{R}$.

Rezolvări:

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă fiind serie armonică (p=1). Cum $\frac{1}{n} \downarrow 0$ rezultă din criteriul lui Leibniz că $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ este convergentă. Deci seria este semiconvergentă.

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{a}{n^2}$ este convergentă din comparația cu

Scanned with CamScanner

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{n^2}=a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\ (p=2>1).$$

Rezultă că seria noastră este absolut convergentă.

c. Seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{n+\sqrt{2}}$ este divergentă din comparaţia cu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2/3}}\ (p=2/3<1).$$

Considerând $f(x)=\frac{\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt{2}}$, avem $f(x)=\frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{2}x)}{3x^{\frac{2}{3}}(x+\sqrt{2})^2}<0$ pentru $x\geq 1$, deci $a_n=\frac{\sqrt[3]{n}}{n+\sqrt{2}}$ este un şir descrescător la zero. Din criteriul lui Leibniz rezultă că seria este convergentă, deci semiconvergentă.

d. Seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a+\frac{1}{n}}}$ are aceeaşi natură cu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$ care este convergentă când a>1, deci în acest caz seria noastră este absolut convergentă. Dacă $a\leq 0$ $\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^{a+\frac{1}{n}}}\neq 0$ deci seria este divergentă. Pentru $a\in(0,1]$ $a_n=\frac{1}{n^{a+\frac{1}{n}}}\downarrow 0$, deci seria este semiconvergentă.

e. Dacă $a=\pm 1$ evident seria este divergentă.

Dacă $|a|<1$ $\frac{|a|^n}{1+a^{2n}}\leq |a|^n$ şi cum $\sum_{n=1}^{\infty}|a|^n$ este o serie geometrică convergentă, rezultă că seria noastră este absolut convergentă.

Dacă $|a|>1$ $\frac{|a|^n}{1+a^{2n}}\leq\frac{1}{|a|^n}$ şi cum $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|a|^n}$ este o serie geometrică convergentă, rezultă că seria noastră este absolut convergentă.

Scanned with CamScanner

2.3. Exerciții propuse

1. *Să se stabilească natura următoarelor serii, calculând* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ *sau* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$:

a. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$;

b. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$;

c. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n+1}{n}$;

d. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} arctg\frac{1}{2(n+1)^2}$;

e. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{1}{3n}}{tg\frac{2}{5n}}$;

f. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n}}$;

g. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}$;

h. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot 2^n+6^{n-1}-2\cdot 3^{n+1}}{12^n}$;

i. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n(n+1)(n+2)}$;

j. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(\sqrt[n]{3}-1\right)$;

Scanned with CamScanner

k. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n(n+1)}}$.

2. *Utilizând criteriile de comparaţie, să se stabilească natura următoarelor serii:*

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1}$;

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3n}}{n^2+2n+4}$;

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$;

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$;

e. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{n}$;

f. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$;

g. $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \ln\left(1+\frac{1}{n^4}\right)$;

h. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1!+2!+\ldots+n!}{(2n)!}$;

i. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$;

Scanned with CamScanner

j. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+q+q^2+...+q^n)}, q>0;$

k. $\sum_{n=1}^{\infty} tg\frac{\pi}{4n};$

l. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n\pi}\arcsin\frac{1}{\sqrt{2n^2+1}};$

m. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{n^{n+1}}.$

3. *Folosind criteriul raportului sau rădăcinii, să se stabilească natura următoarelor serii:*

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!};$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot a^n, a>0;$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \cdot a^n, a>0;$

d. $\frac{4}{2}+\frac{4\cdot 7}{2\cdot 6}+\frac{4\cdot 7\cdot 10}{2\cdot 6\cdot 10}+...;$

e. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1^3+2^3+...+n^3}{n^3}-\frac{n}{4}\right)^n;$

f. $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot arctg^n\frac{n+1}{n};$

g. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2};$

Scanned with CamScanner

h. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{n\ln n}$;

i. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a\cdot\frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^{n}, a>0$;

j. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$;

k. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{(2n^2-n+1)^{(n+1)/2}}$;

l. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$.

4. *Folosind criteriul Raabe-Duhamel sau logaritmic, să se stabilească natura următoarelor serii*:

a. $\sum_{n=1}^{\infty}e^{\sqrt{n}}$;

b. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 6\cdot\ldots\cdot[2+4(n-1)]}{3\cdot 7\cdot\ldots\cdot[3+4(n-1)]}$;

c. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^2\cdot 5^2\cdot\ldots\cdot(4n-3)^2}{3^2\cdot 7^2\cdot\ldots\cdot(4n-1)^2}$;

d. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}\right]^{x}, x\in\mathbb{R}$;

e. $\sum_{n=1}^{\infty}a^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}$;

Scanned with CamScanner

f. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e+1)(2e+1)\dots(ne+1)}{n^n}$;

g. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)} \cdot \frac{1}{2n+1}$;

h. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^a}, a>0, a\neq 0$

i. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{a\ln n+b}{c\ln n+d}}, a,b,c,d>0$;

j. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{\left(2+\sqrt{1}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)\dots\left(2+\sqrt{n}\right)}$;

k. $\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)\left[\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha-n+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)}\right]^2, \alpha\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$;

l. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\cdot n^{-p}}{q(q+1)\dots(q+n)}, q>0, p>0$.

5. *Să se stabilească convergența absolută și semiconvergența următoarelor serii:*

a. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{\ln n}$;

b. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n^2\cdot\sqrt[n]{n}}$;

c. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\cdot\frac{3n+1}{2^n}$;

Scanned with CamScanner

d. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{\ln n}{n+2}$;

e. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n+1)^{n+2}}{n^{n+2}}$;

f. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1+2+...+2^{n+1}}{2^n}$;

g. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{27n^2+36n+11}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}$;

h. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\cos\frac{1}{n}+1}$;

i. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a-1)...(a-n+1)}{n!}, a\in\mathbb{R}-\mathbb{N}$;

j. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin n^2$.

2.4. Indicații şi răspunsuri

1. **a.** $S_n=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\to\frac{3}{4}$;

b. $$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{3^k}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k-1}{3^k}+\frac{1}{3^k}\right)=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{3^{k-1}}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}=$$
$$=\frac{1}{3}S_{n-1}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)=\frac{1}{3}\left(S_n-\frac{n}{3^n}\right)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$$

$$\Rightarrow S_n=\frac{3}{4}-\frac{n}{2\cdot 3^n}-\frac{3}{4\cdot 3^n}\to\frac{3}{4};$$

Scanned with CamScanner

c. $S_n = \ln(n+1) \to \infty$ divergentă;

d. $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\operatorname{arctg}\frac{k+1}{k+2} - \operatorname{arctg}\frac{k}{k+1}\right) =$

$$= \operatorname{arctg}\frac{n+1}{n+2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{2} \to \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\frac{1}{2};$$

e. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{5n}{6n} = \frac{5}{6} \neq 0$, divergentă;

f. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \neq 0$, divergentă;

g. $S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{(k+2)!} = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+2)!}\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+2)!} \to \frac{1}{2};$

h. $S_n = 5\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{6^n} + \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^n} - 6\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4^n} \to$

$$\to 5\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{6}} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 6\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = -\frac{5}{6};$$

i. $\frac{2k+3}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{k} - \frac{2}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right),$

$$S_n = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{1}{2} - \frac{3}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \to \frac{7}{4};$$

j. $\lim_{n\to\infty} a_n = \ln 3 \neq 0$, divergentă;

k. $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{k}{k+1}} - \sqrt{\frac{k-1}{k}}\right) = \sqrt{\frac{n}{n+1}} \to 1.$

Scanned with CamScanner

2. **a.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-1}\cong\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergentă (p=1);

b. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cong\sum\frac{1}{n^{3/2}}$ convergentă ($p=\frac{3}{2}$);

c. $\frac{n!}{n^n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n}<\frac{2}{n^2}$ şi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$ convergentă, deci $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ convergentă;

d. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}\cong\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergentă;

e. $a_n>\frac{1}{n}$ şi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergentă, deci $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ divergentă;

f. $\sum_{n=2}^{\infty}a_n\cong\sum_{n=2}^{\infty}1$ divergentă;

g. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cong\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergentă;

h. $a_n<\frac{1}{n^2}$ convergentă;

i. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cong\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ convergentă;

j. convergentă pentru $q\geq 1$;

k. divergentă; **l.** convergentă; **m.** convergentă.

Scanned with CamScanner

3. a. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1$, convergentă;

b. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$, convergentă pentru $a<1$;

c. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a \cdot e$, convergentă pentru $a < \frac{1}{e}$;

d. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+1}{4n-2} = \frac{3}{4} < 1$, convergentă;

e. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} < 1$, convergentă;

f. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{\pi}{4} < 1$, convergentă;

g. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty > 1$, divergentă;

h. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0$, convergentă;

i. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$, convergentă pentru $a<1$;

j. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{4} < 1$, convergentă;

k. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, convergentă;

l. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1$, convergentă.

Scanned with CamScanner

4. **a.** $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(e^{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}-1\right) =,$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right) = -\infty < 1 \text{ divergentă;}$$

b. $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{4n+3}{4n+2}-1\right) = \frac{1}{4} < 1$, divergentă;

c. $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \frac{16n^2+8n}{16n^2+8n+1} < 1$, divergentă;

d. $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left[\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^x - 1\right] =$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left[\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^x - 1\right] = \frac{x}{2},$$

convergentă pentru $x>2$;

e. convergentă pentru $-\ln a > 1$;

f. $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = -\frac{1}{2}-\frac{1}{e} < 1$, divergentă;

g. $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \frac{3}{2} > 1$, convergentă;

h. convergentă pentru $a<\alpha$;

i. $\lim_{n\to\infty} \frac{-\ln a_n}{\ln n} = -\lim_{n\to\infty} \frac{a\ln n + b}{\ln n(c\ln n + d)} = 0 < 1$, divergentă;

j. $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \infty > 1$, convergentă;

Scanned with CamScanner

k. $\lim_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=4\alpha+1$, convergentă pentru $\alpha>0$;

l. $\lim_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^p-n^p}{n^{p-1}}-q=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^p}{\dfrac{1}{n}}-q=p-q,$

convergentă pentru p-q>1.

5. **a.** $\dfrac{1}{\ln n}>\dfrac{1}{n}$ și deci $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln n}$ divergentă, $\dfrac{1}{\ln n}\downarrow 0$ și seria este semiconvergentă;

b. serie absolut convergentă;

c. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{2}<1$ și deci $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n+1}{2^n}$ este convergentă, de unde rezultă că seria noastră este absolut convergentă;

d. serie semiconvergentă;

e. $\lim_{n\to\infty}|a_n|=e\neq 0$, divergentă;

f. divergentă;

g. $|a_n|\cong\dfrac{1}{n}$, deci $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ este divergentă.

Dacă

$$f(x)=\frac{27x^2+36x+11}{(3x+1)(3x+2)(3x+3)}=\frac{3(3x+2)^2-1}{(3x+1)(3x+2)(3x+3)}=$$
$$=\frac{3y^2-1}{y^3-y}, y=3x+2$$

Scanned with CamScanner

$$f'(x)=\frac{-3y^4-1}{(y^3-y)^2\cdot 3}<0\,,$$

deci f este descrescătoare şi deci $a_n \downarrow 0$. Rezultă o serie semiconvergentă;

h. $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x+1}$ crescătoare pe (0,π/2), deci $a_n \downarrow 0$, serie semiconvergentă;

i. dacă $a \geq 0$ seria este absolut convergentă, dacă $a \leq -1$ seria este divergentă, dacă $a \in (-1,0)$ seria este semiconvergentă;

j. divergentă.

Scanned with CamScanner

3. SERII DE FUNCȚII. SERII DE PUTERI

3.1. Considerații teoretice

A. ŞIRURI DE FUNCȚII

Definiția 1. Fie o mulțime $A \subset \mathbb{R}$ nevidă. Orice aplicație definită pe $A \times \mathbb{N}$ şi cu valori în $\mathbb{R}$, $(x,n) \to y$, se numeşte ***şir de funcții reale***, notat (f_n).

Definiția 2. Fie (f_n) un şir de funcții reale definite pe A. Spunem că:

1. un punct $a \in A$ este ***punct de convergență*** al şirului de funcții (f_n) dacă şirul de numere $f_n(a)$ este convergent;
2. mulțimea $C = \{a \in A | \ (f_n(a)) \text{ este convergent}\}$ este ***mulțimea de convergență*** a şirului de funcții (f_n);
3. funcția $f: C \to \mathbb{R}$ cu proprietatea $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, este ***funcția limită*** a şirului de funcții (f_n).

Definiția 3. Fie (f_n) un şir de funcții reale definite pe A. Spunem că:

1. şirul (f_n) ***converge simplu*** pe A către f şi scriem $f_n \overset{s}{\underset{A}{\to}} f$ dacă $\forall x \in A \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall n > N(\varepsilon, x);$$

2. şirul (f_n) ***converge uniform*** pe A către f şi scriem $f_n \overset{u}{\underset{A}{\to}} f$ dacă $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall n > N(\varepsilon) \forall x \in A .$$

Criteriul lui Cauchy

Şirul (f_n) de funcții definite pe A este uniform convergent către $f: A \to \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă

Scanned with CamScanner

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : | f_n(x) - f_m(x) | < \varepsilon\ \forall n,m > N(\varepsilon)\ \forall x \in A.$$

Teorema 1. *Limita unui şir uniform convergent de funcţii continue este o funcţie continuă.*

Teorema 2. *Fie (f_n) un şir de funcţii derivabile pe intervalul $I \subset \mathbb{R}$. Dacă:*

1. *şirul (f_n) converge uniform pe I către o funcţie f;*
2. *şirul derivatelor (f_n') converge uniform către o funcţie g pe I, atunci funcţia limită este derivabilă pe I şi $f'=g$.*

Teorema 3. *Fie (f_n) un şir uniform convergent de funcţii integrabile pe un interval $[a,b]$. Atunci:*

1. *funcţia limită f este integrabilă pe $[a,b]$;*
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

B. SERII DE FUNCŢII

Definiţia 1. Fie (f_n) un şir de funcţii definite pe A. Atunci:

1. simbolul $f_1 + f_2 + ... + f_n + ... = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n = \sum f_n$ se numeşte ***serie de funcţii***;
2. funcţiile $f_1, f_2, ..., f_n, ...$ se numesc ***termeni ai seriei de funcţii***;
3. şirul de funcţii (S_n), unde $S_n = f_1 + f_2 + ... + f_n$ se numeşte ***şir al sumelor parţiale ale seriei de funcţii***.

Definiţia 2. Fie (f_n) un şir de funcţii definite pe A. Spunem că:

1. punctul $a \in A$ este un ***punct de convergenţă*** al seriei de funcţii $\sum f_n$ dacă seria numerică $\sum f_n(a)$ este convergentă;
2. mulţimea $C = \{a \in A | \sum f_n(a)$ este convergentă$\}$ este ***mulţimea de convergenţă*** a seriei de funcţii $\sum f_n$.

Scanned with CamScanner

Definiția 3. Seria $\sum f_n$ se numeşte ***simplu convergentă*** pe domeniul $D \subset A$, dacă şirul (S_n) converge simplu către S pe D şi uniform convergentă pe $D \subset A$, dacă şirul (S_n) converge uniform către S pe D.

Criteriul lui Cauchy

Seria de funcții $\sum f_n$ definite pe A este uniform convergentă pe A dacă şi numai dacă

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in A : | f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots + f_{n+p}(x) | < \varepsilon$$
$$n > N(\varepsilon)\ \forall p \geq 1\ \forall x \in A .$$

Criteriul lui Weierstrass

O serie de funcții $\sum f_n$ definite pe A este uniform convergentă pe A dacă există o serie numerică convergentă $\sum a_n$, cu termenii pozitivi, astfel încât $|f_n(x)| \leq a_n, \forall n \forall x \in A$.

Teorema 1. *O serie uniform convergentă de funcții continue are ca sumă o funcție continuă.*

Teorema 2. *Fie $\sum f_n$ o serie de funcții derivabile pe intervalul $I \subset \mathbb{R}$. Dacă:*

1. *seria $\sum f_n$ este uniform convergentă pe I către funcția f;*
2. *seria derivatelor $\sum f_n'$ este uniform convergentă pe I către funcția g, atunci funcția sumă f este derivabilă şi f '=g.*

Teorema 3. *Fie $\sum f_n$ o serie uniform convergentă de funcții integrabile pe un interval [a,b]. Atunci:*

1. *Funcția sumă f este integrabilă pe [a,b].*
2. $\sum \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

Scanned with CamScanner

C. SERII DE PUTERI

Definiția 1. Seria de funcții $\sum f_n$, unde $f_n(x) = a_n x^n \ \forall x \in \mathbb{N} \ \forall x \in \mathbb{R}$, se numește ***serie de puteri***.

Teorema lui Abel

Pentru orice serie de puteri $\sum = a_n x^n$ *există un număr R,* $0 \le R \le \infty$, *numit* ***rază de convergență****, astfel încât:*

1. *seria este absolut convergentă pe intervalul (-R,R), numit* ***interval de convergență****;*
2. *seria este divergentă pentru orice* $x \in (-\infty, -R) \cup (R, \infty)$ *;*
3. *seria este uniform convergentă pe intervalul [-r,r] cu 0<r<R.*

Teorema lui Cauchy-Hadamard

Fie seria de puteri $\sum a_n x^n$ *și R raza sa de convergență. Dacă* $L = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ *atunci:*

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{L}, & 0 < L \le \infty; \\ \infty, & L = 0. \end{cases}$$

Corolar

Fie seria de puteri $\sum a_n x^n$ *și R raza sa de convergență. Dacă*

$L = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ *atunci:*

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{L}, & 0 < L \le \infty; \\ \infty, & L = 0. \end{cases}$$

Teorema 1. *Suma S(x) a unei serii de puteri* $\sum a_n x^n$ *este o funcție continuă pe intervalul de convergență.*

Scanned with CamScanner

Teorema 2. *Suma derivatelor termenilor unei serii de puteri este egală cu derivata sumei acestei serii, în orice punct din intervalul de convergență:* $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$.

Teorema 3. *O serie de puteri poate fi integrată termen cu termen şi avem*

$$\int_a^b S(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^b a_n x^n dx\right),$$

unde a,b aparţin intervalului de convergenţă.

D. SERII TAYLOR

Definiția 1. Fie I un interval, $a\in I$ şi $f:I\to\mathbb{R}$ indefinit derivabilă în punctul a. Atunci seria de funcţii

$$f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\ldots$$

se numeşte ***serie Taylor*** a funcţiei f în punctul a.

Definiția 2. Egalitatea

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_n(x)$$

se numeşte ***formula lui Taylor***, iar $R_n(x)$ se numeşte ***restul formulei Taylor***.

Teorema 1. *Seria Taylor a funcţiei f în punctul a este convergentă într-un punct* $x\in I\cap C$ *către valoarea funcţiei f(x) dacă şi numai dacă* $\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$.

Definiția 3. Seria obţinută pentru a=0 din seria Taylor se numeşte ***seria Mac Laurin*** a funcţiei f:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\ldots$$

Scanned with CamScanner

3.2. Exerciții rezolvate

1. *Să se studieze convergența următoarelor serii:*

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n + 5^n}$;

b. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1) \frac{(2x)^n}{n}$;

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n \cdot 2^n}$;

d. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2+n+1} \left(\frac{4x-1}{x+3} \right)^n$;

e. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2+n} \cdot x^n$.

Rezolvări:

a. Intervalul de convergență este (-5,5) căci

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} + 5^{n+1}}{3^n + 5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}\left[\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} + 1\right]}{5^n\left[\left(\frac{3}{5}\right)^n + 1\right]} = 5.$$

Pentru $x=\pm 5$ $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{3^n + 5^n} = 1 \neq 0$, deci seria este divergentă. Rezultă că mulțimea de convergență coincide cu intervalul de convergență, adică (-5,5).

b. Intervalul de convergență este $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, raza fiind $R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n (n+1)}{2^{n+1} \cdot n} = \frac{1}{2}$. Pentru $x = \frac{1}{2}$ obținem $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ care

Scanned with CamScanner

din criteriul lui Leibniz rezultă că este convergentă.

Pentru $x=-\frac{1}{2}$ avem $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, care este o serie armonică divergentă (p=1). Astfel mulțimea de convergență este $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

c. Raza de convergență pentru seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n\cdot 2^n}$ este $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)}{2^n\cdot n}=2$. Deci intervalul de convergență este (-2,2). Pentru y=2 obținem $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ care este o serie armonică divergentă, iar pentru y=-2 obținem $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ care este o serie alternantă convergentă. Deci mulțimea de convergență este [-2,2) pentru seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n\cdot 2^n}$ şi [0,4) pentru seria noastră, întrucât $y=x-2$.

d. Notăm $\frac{4x-1}{x+3}=y$ şi obținem seria $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2+n+1}\cdot y^n$. Raza sa de convergență este $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}[(n+1)^2+(n+1)+1]}{\sqrt{(n+1)^2+1}(n^2+n+1)}=1$. Deci intervalul de convergență este (-1,1).

Pentru y=1 avem $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2+n+1}$, adică o serie alternantă convergentă ($a_n\downarrow 0$).

Pentru y=-1 avem $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2+n+1}\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, deci o serie divergentă.

Mulțimea de convergență este aşadar (-1,1] pentru seria de puteri ale lui y. Rezolvând inecuațiile $-1<\frac{4x-1}{x+3}\le 1$ obținem $\frac{5x+2}{x+3}>0$ şi $\frac{3x-4}{x+3}\le 0$,

Scanned with CamScanner

adică $x \in (-\infty,-3) \cup (-2/5,\infty)$ şi $x \in (-3,4/3]$, de unde mulţimea de convergenţă este (-2/5,4/3].

e. Raza de convergenţă este $R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}} = \dfrac{1}{e}$.

Pentru $x = \dfrac{1}{e}$ obţinem $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2+n} \cdot \dfrac{1}{e^n}$, iar pentru $x = -\dfrac{1}{e}$ obţinem $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2+n} \cdot \dfrac{(-1)^n}{e^n}$.

În ambele cazuri $|x_n| = \left[\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}}{e}\right]^n > 1$, deci (x_n) nu converge la 0, adică avem serii divergente. Astfel mulţimea de convergenţă este $(-1/e,1/e)$.

2. *Să se dezvolte în serie Mac Laurin următoarele funcţii şi să se indice intervalele de convergenţă:*

a. $\ln(2+x)$;

b. $\ln(1+x-2x^2)$;

c. $\dfrac{3x}{x^2+5x+6}$;

d. $\sin 3x + x\cos 3x$;

e. $x\,\text{arctg}x - \ln\sqrt{1+x^2}$.

Rezolvări:

a. Dacă $f(x) = \ln(2+x)$ avem

$$f'(x) = \frac{1}{2+x} = (2+x)^{-1}$$

Scanned with CamScanner

$$f''(x) = (-1)(2+x)^{-2}$$

$$f'''(x) = (-1)(-2)(2+x)^{-3}\ldots$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(2+x)^{-n} \text{ (inducție).}$$

Deci $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!\cdot 2^{-n}$, de unde

$$\ln(2+x) = \ln 2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2^2 \cdot 2} + \frac{x^3}{2^3 \cdot 3} - \frac{x^4}{2^4 \cdot 4} + \ldots$$

Altfel, cum $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots, |x| < 1$, rezultă

$$\frac{1}{1+\frac{x}{2}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + \ldots, \left|\frac{x}{2}\right| < 1$$

adică

$$\frac{2}{2+x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + \ldots, |x| < 2.$$

Integrând, obținem $2\ln(2+x) = c + x - \frac{x^2}{2\cdot 2} + \frac{x^3}{4\cdot 3} - \frac{x^4}{8\cdot 4} + \ldots, |x| < 2.$

Pentru $x=0$ rezultă $2\ln 2 = c$, deci

$$\ln(2+x) = \ln 2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2^2 \cdot 2} + \frac{x^3}{2^3 \cdot 3} - \frac{x^4}{2^4 \cdot 4} + \ldots, |x|<2.$$

b. $\ln(1 + x - 2x^2) = \ln(1-x)(1+2x) = \ln(1-x) + \ln(1+2x), x \in (-1/2, 1).$

Cum $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots$ prin integrare obținem

$$-\ln(1-x) = c + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots, x \in (-1,1).$$

Dacă $x=0$ rezultă $c=0$, deci $-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots, x \in (-1,1)$.

Analog $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 \ldots, x \in (-1,1)$ și înlocuind x cu $2x$ avem

Scanned with CamScanner

II 37834/756933

$\frac{1}{1+2x} = 1 - 2x + (2x)^2 - (2x)^3 + \ldots,\ x \in (-1/2, 1/2)$, de unde prin integrare

$$\frac{1}{2}\ln(1+2x) = c + x - 2\frac{x^2}{2} + 2^2\frac{x^3}{3} - \ldots,$$

adică

$$\ln(1+2x) = 2x - \frac{2^2x^2}{2} + \frac{2^3x^3}{3} - \ldots,\ x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Rezultă în final că $\ln(1+x-2x^2) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n+1}{n}\cdot x^n,\ x \in (-1/2, 1/2)$.

c. Putem scrie $\frac{3x}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3}$ cu A=-6, B=9. Cum $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 \ldots,\ |x| < 1$, punând $\frac{x}{a}$ în loc de x obținem $\frac{a}{a+x} = 1 - \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^3}{a^3} + \ldots,\ |x| < a$. Înlocuind a cu 2, respectiv cu 3, obținem $\frac{2}{2+x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^3}{2^3} + \ldots,\ |x| < 2$, $\frac{3}{3+x} = 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{3^2} - \frac{x^3}{3^3} + \ldots,\ |x| < 3$, deci

$$\frac{9}{x+3} - \frac{6}{x+2} = 3\left(1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{3^2} - \frac{x^3}{3^3} + \ldots\right) - 3\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^3}{2^3} + \ldots\right) =$$

$$= 3\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{3^n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{2^n}\right] = 3\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{3^n} - \frac{1}{2^n}\right)x^n$$

d. Cum $\sin x = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$, $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ pentru $x \in \mathbb{R}$, rezultă înlocuind x cu $3x$, că $\sin 3x = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^{2n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ și $\cos 3x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{2n}x^{2n}}{(2n)!}$ de unde

UNIVERSITATEA TRANSILVANIA DIN BRASOV BIBLIOTECĂ CENTRALĂ

UNIVERSITATEA DIN BRASOV BIBLIOTECA

Scanned with CamScanner

$$\sin 3x + x\cos 3x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{3^{2n}x^{2n+1}\cdot(2n+4)}{(2n+1)!}, x\in\mathbb{R}.$$

e. Din $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 \ldots, |x|<1$, obţinem

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots, |x|<1$$

şi

$$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + \ldots, |x|<1.$$

Deci $\ln\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + \ldots\right)$. Analog

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 \ldots, |x|<1, \ \text{arctg}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

Obţinem în final că

$$x\text{arctg}x - \ln\sqrt{1+x^2} = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{5} - \frac{x^8}{7} + \ldots -$$
$$-\frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + \ldots\right) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}, x\in(-1,1).$$

3. *Să se determine mulţimea de convergenţă şi suma pentru următoarele serii de puteri:*

a. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$;

b. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(2n-1)x^{2n-2}$;

Scanned with CamScanner

c. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n+1)^2x^n$.

Rezolvări:

a. Avem $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1$ şi deci raza de convergenţă este 1, iar intervalul de convergenţă (-1,1). Pentru x=1 obţinem seria armonică alternantă $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$, care este convergentă (criteriul lui Leibniz), iar pentru x=-1, obţinem seria armonică $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ care este divergentă. Aşadar mulţimea de convergenţă este (-1,1]. Fie $S(x)$ suma seriei. Prin derivare rezultă $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{n-1}=1-x+x^2-x^3+...=\frac{1}{1+x}$, cu $|x|<1$. Deci $S(x)=\ln(1+x)+c$. Cum $S(0)=0$ rezultă $S(x)=\ln(1+x), x\in(-1,1)$.

b. Raza de convergenţă este $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}=1$. Pentru $x=\pm1$ avem $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(2n-1)$ care este divergentă, întrucât $a_n \not\to 0$. Deci mulţimea de convergenţă este (-1,1). Fie $S(x)$ suma seriei. Integrând termen cu termen obţinem

$$\int S(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n-1}+c=c+x-x^3+x^5-x^7+...=$$

$$=c+x(1-x^2+x^4-x^6+...)=c+\frac{x}{1+x^2}$$

de unde $S(x)=\left(\frac{x}{1+x^2}\right)'=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}, x\in(-1,1)$.

c. Evident intervalul de convergenţă este (-1,1), iar pentru $x=\pm1$ seriile obţinute sunt divergente, deoarece $(n+1)^2\to\infty$. Astfel mulţimea de

Scanned with CamScanner

convergență este (-1,1). Derivând relația $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$, obținem $-\frac{1}{(1+x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^{n-1}$, de unde $-\frac{x}{(1+x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^n$. Derivând din nou, deducem că $\frac{x-1}{(1+x)^3}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2 x^{n-1}$, deci

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)^2 x^n=\frac{x-1}{(1+x)^3},$$

adică

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (n+1)^2 x^n=\frac{1-x}{(1+x)^3},\ x\in(-1,1).$$

3.3. Exerciții propuse

1. *Să se determine mulțimea de convergență pentru următoarele serii de puteri:*

a. $\sum_{n=1}^{\infty}[1-(-2)^n]x^n$;

b. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^3}{(3n)!}x^n$;

c. $\sum_{n=1}^{\infty}n^n(x+2)^n$;

d. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4n-3)}{3\cdot 7\cdot 11\cdot\ldots\cdot(4n-1)}\cdot x^n$;

e. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)x^n$;

Scanned with CamScanner

convergență este (-1,1). Derivând relația $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$, obținem

$-\frac{1}{(1+x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^{n-1}$, de unde $-\frac{x}{(1+x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^n$. Derivând din nou, deducem că $\frac{x-1}{(1+x)^3}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2 x^{n-1}$, deci

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)^2 x^n=\frac{x-1}{(1+x)^3},$$

adică

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}(n+1)^2 x^n=\frac{1-x}{(1+x)^3},\ x\in(-1,1).$$

3.3. Exerciții propuse

1. *Să se determine mulțimea de convergență pentru următoarele serii de puteri:*

a. $\sum_{n=1}^{\infty}[1-(-2)^n]x^n$;

b. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^3}{(3n)!}x^n$;

c. $\sum_{n=1}^{\infty}n^n(x+2)^n$;

d. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1\cdot5\cdot9\cdot\ldots\cdot(4n-3)}{3\cdot7\cdot11\cdot\ldots\cdot(4n-1)}\cdot x^n$;

e. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)x^n$;

Scanned with CamScanner

2. $B(p+1,q)=\dfrac{p}{p+q}B(p,q)$;

3. $B(p,q+1)=\dfrac{q}{p+q}B(p,q)$;

4. $B\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)=\pi$.

Definiția 2. Se numește ***funcție gama*** sau ***funcție de spețа a doua a lui Euler***, integrala:

$$\Gamma(p)=\int_0^{\infty} x^{p-1}e^{-x}dx,\ p>0.$$

Proprietăți

1. $\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$;

2. $\Gamma(p+1)=p\Gamma(p),\ p>0$;

3. $\Gamma(p+1)=p!,\ \ p\in\mathbb{N}$;

4. $\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\dfrac{\pi}{\sin p\pi},\ p\in(0,1)$.

Teorema 1. *Legătura între funcțiile beta și gama este dată de relația:*

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

4.2. Exerciții rezolvate

1. *Pornind de la definiție, să se cerceteze convergența următoarelor integrale improprii:*

a. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$;

b. $\displaystyle\int_e^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}$;

Scanned with CamScanner

c. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^6} dx$;

d. $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x+1)}$;

e. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

f. $\int_{0}^{3} \frac{dx}{x^2-9}$;

g. $\int_{0}^{3} \frac{dx}{x^2-3x+2}$.

Rezolvări:

a. Avem $\int_{0}^{b} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int_{0}^{b} \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \operatorname{arctg}(x+1)\Big|_0^b = \operatorname{arctg}(b+1) - \frac{\pi}{4}$ şi $\lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{b\to\infty}\left[\operatorname{arctg}(b+1) - \frac{\pi}{4}\right] = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$, deci integrala este convergentă.

b. $$\int_{e}^{\infty} \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{b\to\infty} \int_{e}^{b} \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{b\to\infty} \ln\ln x\Big|_e^b = \lim_{b\to\infty} (\ln\ln b - \ln\ln e) =$$

$$= \infty - \ln 1 = \infty,$$

deci integrala este divergentă.

c. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^6} dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{x^2}{1+x^6} dx + \int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^6} dx =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{x^2}{1+x^6} dx + \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} \frac{x^2}{1+x^6} dx =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \frac{1}{3} \operatorname{arctg} x^3\Big|_a^0 + \lim_{b\to\infty} \frac{1}{3} \operatorname{arctg} x^3\Big|_0^b =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left(0 - \frac{1}{3}\operatorname{arctg} a^3\right) + \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{3}\operatorname{arctg} b^3 - 0\right) =$$

Scanned with CamScanner

$$= -\frac{1}{3}\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3}$$, deci integrala este convergentă.

d. Calculăm mai întâi $\int_0^b \frac{dx}{(x^2+1)(x+1)}$: $\frac{1}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+1}$, de unde $1 = (Ax+B)(x+1) + C(x^2+1)$ şi prin identificarea coeficienţilor $A+B=0, A+C=0, B+C=1$, adică $B=C=-A=1/2$. Rezultă că

$$\int_0^b \frac{dx}{(x^2+1)(x+1)} = \int_0^b \frac{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+1}dx + \int_0^b \frac{\frac{1}{2}}{x+1}dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\int_0^b \frac{2x}{x^2+1}dx + \frac{1}{2}\int_0^b \frac{dx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{x+1} =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln(x^2+1)\Big|_0^b + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}x\Big|_0^b + \frac{1}{2}\ln|x+1|\Big|_0^b =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln(b^2+1) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}b + \frac{1}{2}\ln(b+1) =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{b+1}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}b .$$

Atunci $\lim\limits_{b\to\infty}\int_0^b \frac{dx}{(x^2+1)(x+1)} = \lim\limits_{b\to\infty}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{b+1}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}b\right) = \frac{\pi}{4}$, adică integrala este convergentă.

e. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(2-2\sqrt{\varepsilon}\right) = 2$, deci integrala este convergentă.

f. $$\int_0^3 \frac{dx}{x^2-9} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{3-\varepsilon} \frac{dx}{x^2-9} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|\Bigg|_0^{3-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{6}\ln\left|\frac{\varepsilon}{6-\varepsilon}\right| - \frac{1}{6}\ln 1\right) = \frac{1}{6}\ln 0 = -\infty ,$$

deci integrala este divergentă.

Scanned with CamScanner

g. $\int_0^3 \frac{dx}{x^2-3x+2} = \int_0^3 \frac{dx}{(x-1)(x-2)} =$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)(x-2)} + \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)(x-2)} + \int_2^3 \frac{dx}{(x-1)(x-2)}.$$

Cum

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)(x-2)} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x^2-3x+2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\left|\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}\right| - \ln 2\right) = \infty,$$

deci integrala este divergentă. Pentru ca $\int_0^3 \frac{dx}{x^2-3x+2}$ să fi fost convergentă era necesar ca toate cele trei integrale să fi fost convergente.

2. *Pe baza criteriilor pentru funcții pozitive, să se studieze convergența integralelor:*

a. $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+x\sqrt{x+1}+2}$;

b. $\int_0^\infty \frac{x^3+2}{\sqrt{x^7+x^3+1}}dx$;

c. $\int_0^\infty \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}dx$;

d. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} tgx dx$;

e. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$;

f. $\int_0^1 \frac{tg(1-x)}{1-x^3}dx$;

Scanned with CamScanner

g. $\int_1^{\infty} \sin x^2$.

Rezolvări:

a. Cum $0 \le \frac{1}{x^2 + x\sqrt{x+1} + 2} \le \frac{1}{x^2}$ şi $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^{\infty} = 1$ este convergentă, rezultă pe baza criteriului I de convergenţă că şi $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + x\sqrt{x+1} + 2}$ este convergentă.

b. Deoarece $\lim_{x\to\infty} x^p f(x) = \lim_{x\to\infty} x^p \frac{x^3+2}{\sqrt{x^7+x^3+1}} = 1$ pentru $p = \frac{1}{2} < 1$, rezultă pe baza criteriului II de convergenţă că integrala este divergentă.

c. Avem

$$\lim_{x\to\infty} x^p f(x) = \lim_{x\to\infty} x^p \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^p}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} x^{p-\frac{3}{2}} = 1$$

pentru $p = \frac{3}{2} > 1$, deci în baza criteriului III de convergenţă, integrala este convergentă.

d. Avem

$$\lim_{x\uparrow\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^p f(x) = \lim_{x\uparrow\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^p tgx = \lim_{x\uparrow\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^p}{\cos x} = \lim_{y\downarrow 0} \frac{y^p}{\sin y} = 1$$

pentru p=1, deci integrala este divergentă.

e. Avem

$$\lim_{x\uparrow 2} (2-x)^p f(x) = \lim_{x\uparrow 2} (2-x)^p \frac{1}{\sqrt{(x-1)(2-x)}} = \lim_{x\uparrow 2} (2-x)^{p-\frac{1}{2}} = 1$$

pentru $p = \frac{1}{2} < 1$ şi

Scanned with CamScanner

$$\lim_{x\downarrow 1}(x-1)^p f(x) = \lim_{x\downarrow 1}(x-1)^p \frac{1}{\sqrt{(x-1)(2-x)}} = \lim_{x\downarrow 1}(x-1)^{p-\frac{1}{2}} = 1$$

pentru $p=\frac{1}{2}<1$, deci integrala este convergentă.

f. Cum

$$\lim_{x\uparrow 1}(1-x)^p f(x) = \lim_{x\uparrow 1}(1-x)^p \frac{\operatorname{tg}(1-x)}{1-x^3} =$$

$$= \lim_{x\uparrow 1}(1-x)^p \frac{\operatorname{tg}(1-x)}{1-x}\cdot\frac{1}{1+x+x^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{x\uparrow 1}(1-x)^p = \frac{1}{3} \text{ pentru } p=0<1,$$

rezultă că integrala este convergentă.

g. $$\int_1^\infty \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt = \frac{-\cos t}{2\sqrt{t}}\Bigg|_1^\infty - \frac{1}{4}\int_1^\infty \frac{\cos t}{t^{\frac{3}{2}}}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\cos 1 - \frac{1}{4}\int_1^\infty \frac{\cos t}{t^{\frac{3}{2}}}dt .$$

Dar cum $\left|\frac{\cos t}{t^{\frac{3}{2}}}\right| \le \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$ şi $\int_1 \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$ este convergentă rezultă că $\int_1^\infty \frac{\cos t}{t^{\frac{3}{2}}}$ este convergentă şi deci $\int_1^\infty \sin x^2 dx$ este convergentă. La prima egalitate am făcut schimbarea de variabilă $x^2=t$.

3. *Să se reducă la integralele lui Euler şi să se deducă natura următoarelor integrale*:

a. $\int_0^\infty \sqrt[3]{x^7}e^{-x}dx$;

b. $\int_{-\infty}^{-1}(x+1)^{-3}e^{x+1}dx$

c. $\int_0^\infty xe^{-\sqrt{x}}dx$;

Scanned with CamScanner

d. $\int_0^1 x(\ln x)^4 dx$;

e. $\int_0^1 \sqrt[4]{x^7}\sqrt[5]{1-x}dx$;

f. $\int_0^1 x^5(1-x^2)^3 dx$;

g. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\cos^n xdx,\ m,n\in \mathbb{R}$

h. $\int_0^\infty \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx$;

i. $\int_{-\infty}^\infty e^{-2x^2+x+1}dx$.

Rezolvări:

a. Evident $I=\int_0^\infty x^{\frac{7}{3}}e^{-x}dx=\Gamma\left(\frac{10}{3}\right)$ convergentă întrucât $\frac{10}{3}>0$.

b. Facem schimbarea de variabilă $x+1=-y$ şi obţinem

$$I=\int_{-\infty}^0 (-y)^{-3}e^{-y}(-1)dy=-\int_0^\infty y^{-3}e^{-y}dy=-\Gamma(-2)\text{ divergentă (-2<0).}$$

c. Cu schimbarea de variabilă $\sqrt{x}=y$ avem

$$I=\int_0^\infty y^2e^{-y}2ydy=2\int_0^\infty y^3e^{-y}dy=2\Gamma(4)=12\text{ convergentă.}$$

d. Notând $\ln x=-y$ obţinem $x=e^{-y}$ şi

$$I=\int_{-\infty}^0 y^4e^{-y}(-e^{-y})dy=\int_0^\infty y^4e^{-2y}dy=\int_0^\infty \frac{t^4}{2^4}e^{-t}\frac{1}{2}dt=\frac{1}{32}\Gamma(5)=\frac{3}{4}$$

convergentă.

e. Avem $I=\int_0^1 x^{\frac{7}{4}}(1-x)^{\frac{1}{5}}dx=B\left(\frac{11}{4},\frac{6}{5}\right)$ convergentă.

Scanned with CamScanner

f. Facem schimbarea de variabilă $x^2 = y$ şi obţinem

$$I = \int_0^1 y^{\frac{5}{2}}(1-y)^3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 y^2(1-y)^3\,dy = \frac{1}{2}B(3,4) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma(3)\Gamma(4)}{\Gamma(7)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot 6}{6!} = \frac{1}{120}$$

convergentă.

g. Cu schimbarea de variabilă $\sin^2 x = t$ avem $x = \arcsin\sqrt{t}$, $dx = \dfrac{1}{2\sqrt{t(1-t)}}dt$,

$$I = \int_0^1 t^{\frac{m}{2}}(1-t)^{\frac{n}{2}}\cdot\tfrac{1}{2}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{m-1}{2}}(1-t)^{\frac{n-1}{2}}dt = \frac{1}{2}B\left(\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2}\right)$$

convergentă pentru $m,n>-1$.

h. Notând

$$\frac{x}{1+x} = t,\ x = \frac{t}{1-t},\ dx = \frac{1}{(1-t)^2}dt,\ I = \int_0^1 t^{\frac{1}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{4}}dt = B\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right)$$

convergentă.

i. Avem

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x^2+x+1}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{8}}dx = e^{\frac{9}{8}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2} =$$

$$= e^{\frac{9}{8}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2y^2}dy = 2e^{\frac{9}{8}}\int_0^{\infty} e^{-2y^2}dy$$

(funcţie pară pe interval simetric). Cu schimbarea de variabilă $2y^2 = t,\ y = \sqrt{\dfrac{t}{2}},\ dy = \dfrac{1}{2\sqrt{2t}}dt$, obţinem

$$I = 2e^{\frac{9}{8}}\int_0^{\infty} e^{-t}\frac{1}{2\sqrt{2t}}dt = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{9}{8}}\int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{9}{8}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{9}{8}}\sqrt{\pi},$$

Scanned with CamScanner

deoarece $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}}$, adică $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ şi $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)>0$.

4.3. Exerciții propuse

1. *Pornind de la definiție, să se cerceteze convergența următoarelor integrale improprii:*

a. $\int_0^{\infty}\frac{\text{arctg}x}{1+x^2}dx$;

b. $\int_0^{\infty}e^{-x}dx$;

c. $\int_0^{\infty}e^{-2x}\cos 3x dx$;

d. $\int_0^{\infty}x^3e^{-x^2}dx$;

e. $\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}dx$;

f. $\int_1^{\infty}\frac{1}{e^{2x}+e^x-2}dx$;

g. $\int_0^1\frac{1}{x^2}dx$;

h. $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$;

i. $\int_{-1}^1\frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$;

j. $\int_{-5}^1\frac{1}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx$;

k. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{tgx+1}dx$;

Scanned with CamScanner

l. $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx$.

2. *Pe baza criteriilor pentru funcții pozitive, să se studieze convergența integralelor:*

a. $\int_1^\infty \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x^2+1}+1}$;

b. $\int_0^\infty \frac{xdx}{\sqrt{x^7+x^2+1}}$;

c. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^3+1}$;

d. $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^3+x}dx$;

e. $\int_0^1 \frac{\arcsin(1-x^2)}{\sqrt{1-x}}dx$;

f. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$;

g. $\int_1^2 \frac{dx}{\ln x}$;

h. $\int_0^1 \frac{dx}{x^4-x^2}$;

i. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}$;

j. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} ctgxdx$;

k. $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$;

Scanned with CamScanner

l. $\int_1^{\infty} \cos x^2 dx$.

3. ***Să se reducă la integralele lui Euler şi să se deducă natura următoarelor integrale:***

a. $\int_0^{\infty} (x-3)^7 e^{3-x} dx$;

b. $\int_0^1 x(\ln x)^{-2} dx$;

c. $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$;

d. $\int_0^{\infty} (x^2 - 5x + 4)e^{-x} dx$;

e. $\int_1^{\infty} (x-1)^3 e^{-(x-1)^2} dx$;

f. $\int_0^{\infty} e^{-4x^2}$;

g. $\int_{-2}^{\infty} e^{-x^2-4x+5} dx$;

h. $\int_0^1 \sqrt[9]{x^2}(1-x^2)^{-3} dx$;

i. $\int_0^1 x^3(1-x^3)^2 dx$;

j. $\int_{-1}^0 x^2(1+x)^3 dx$;

k. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}$;

l. $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(1+x)^5} dx$;

Scanned with CamScanner

m. $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^{\frac{5}{3}}}dx$.

4.4. Indicaţii şi răspunsuri

1. **a.** $I = \frac{\pi^2}{8}$ convergentă;

b. I=1 convergentă;

c. $I = \frac{2}{13}$ convergentă;

d. $I = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} ye^{-y}dy = \frac{1}{2}$ convergentă;

e. $I = \ln\left|\frac{\sqrt{1+x+x^2}-x-2}{\sqrt{1+x+x^2}-x}\right|\Bigg|_0^{\infty} = \ln 3$ convergentă;

f. $I = \int_e^{\infty} \frac{dy}{y(y^2+y-2)} = \int_e^{\infty} \frac{dy}{y(y-1)(y+2)} =$

$= \frac{1}{6}\ln\frac{(y+2)(y-1)^2}{y^3}\Bigg|_e^{\infty} = -\frac{1}{6}\ln\frac{(e+2)(e-1)^2}{e^3}$ convergentă;

g. $I = -\frac{1}{x}\Big|_0^1 = \infty$ divergentă;

h. I=2 convergentă;

i. I=0 convergentă;

j. $I = \frac{1}{3}\arcsin\frac{x+2}{3}\Big|_{-5}^{1} = \frac{\pi}{3}$ convergentă;

k. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{tg^2x+1}{(tgx+1)(tg^2x+1)}dx = \int_0^{\infty} \frac{dy}{(y+1)(y^2+1)} = \frac{\pi}{4}$ convergentă;

l. $I = \sqrt{3}$ convergentă.

Scanned with CamScanner

2. **a.** divergentă;

b. convergentă;

c. divergentă;

d. convergentă;

e. convergentă;

f. convergentă;

g. $\frac{1}{\ln x} \geq \frac{1}{x-1}$ şi $\int_1^2 \frac{1}{x-1} dx$ este divergentă, deci $\int_1^2 \frac{1}{\ln x} dx$ este divergentă;

h. divergentă;

i. convergentă;

j. divergentă;

k. pentru $x>1$ avem $0 < e^{-x^2} < e^{-x}$ şi $\int_1^\infty e^{-x} dx = \frac{1}{e}$ este convergentă, deci $\int_0^\infty e^{-x^2}$ este convergentă;

l. $\int_1^\infty \cos x^2 dx = \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt = \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\Big|_1^\infty + \frac{1}{4}\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}} dt =$

$$= -\frac{1}{2}\sin 1 + \frac{1}{4}\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}} dt.$$

Dar $\left|\frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}}\right| \leq \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$ şi cum $\int_1^\infty \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} dt$ este convergentă, rezultă că şi $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}} dt$ este convergentă şi la fel şi $\int_1^\infty \cos x^2 dx$.

3. **a.** $I = \Gamma(8) = 7!$, convergentă;

b. $I = -2\Gamma(-1)$ divergentă;

c. $I = \Gamma(1) = 1$ convergentă;

Scanned with CamScanner

d. $I=\Gamma(3)-5\Gamma(2)+4\Gamma(1)=1$ convergentă;

e. $I=\frac{1}{2}\Gamma(2)=\frac{1}{2}$ convergentă;

f. $I=\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{4}$ convergentă;

g. $I=e^9\int_0^\infty e^{-y^2}dy=e^9\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ convergentă;

h. $I=B\left(\frac{11}{9},-2\right)$ divergentă;

i. $I=\frac{1}{3}B\left(\frac{4}{3},3\right)$ convergentă;

j. $I=B(3,4)=\frac{\Gamma(3)\Gamma(4)}{\Gamma(7)}=\frac{2!\cdot 3!}{6!}=\frac{1}{60}$ convergentă;

k. $I=\frac{1}{5}B\left(\frac{1}{5},\frac{2}{3}\right)$ convergentă;

l. facem schimbarea de variabilă $\frac{x}{1+x}=t$ şi obţinem $I=B(2,3)=\frac{1!\cdot 2!}{4!}=\frac{1}{12}$ convergentă;

m. facem schimbarea de variabilă $\frac{x}{1+x}=t$ şi obţinem $I=B\left(\frac{1}{6},\frac{3}{2}\right)$ convergentă.

Scanned with CamScanner

5. SPAȚIUL $\mathbb{R}^n$. LIMITE ȘI CONTINUITATE PENTRU FUNCȚII DE MAI MULTE VARIABILE.

5.1. Considerații teoretice

A. SPAȚIUL $\mathbb{R}^n$

Definiția 1. Mulțimea grupelor ordonate de n numere reale

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times..\times = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, x_n \in \mathbb{R}\}$$

se numește ***spațiul real cu n dimensiuni***. Un element din $\mathbb{R}^n$ se notează $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ și se numește ***punct***, iar $x_1, x_2, ..., x_n$ se numesc ***coordonatele*** sau ***proiecțiile*** punctului x.

Definiția 2. Pe $\mathbb{R}^n$ se pot defini următoarele operații:

1. ***adunarea***:

$$x + y = (x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)\ ;$$

2. ***înmulțirea***:

$$x \cdot y = (x_1, ..., x_n) \cdot (y_1, ..., y_n) = (x_1 \cdot y_1, ..., x_n \cdot y_n)\ ;$$

3. ***înmulțirea cu scalari***:

$$\alpha x = \alpha(x_1, ..., x_n) = (\alpha x_1, ..., \alpha x_n).$$

Teorema 1. *Proprietăți*:

1. $\mathbb{R}^n$ *împreună cu înmulțirea cu scalari are o structură de spațiu vectorial*:

   a. $(R^n, +)$ *grup abelian*:

   $x + y = y + x$;

Scanned with CamScanner

$(x+y)+z=x+(y+z)$;
$x=x+0=0+x, 0=(0,...,0)$;
$x+(-x)=(-x)+x=0, -x=(-x_1,...,-x_n)$.

b. $1 \cdot x = x$;
$\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$;
$(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$;
$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$.

2. *Înmulţirea are următoarele proprietăţi:*

$x \cdot y = y \cdot x$;
$(x \cdot y)\cdot z = x \cdot (y \cdot z)$;
$x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$;
$\alpha(x \cdot y)=(\alpha x)y = x(\alpha y)$.

Definiţia 3. Fie $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, $y=(y_1,y_2,...,y_n)\in \mathbb{R}^n$. Se numeşte ***produs scalar*** dintre x şi y numărul

$$\langle x,y\rangle = x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n=\sum_{i=1}^{n} x_iy_i .$$

Teorema 2. *Proprietăţi*:

1. $\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle$;
2. $\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$;
3. $\alpha\langle x,y\rangle=\langle \alpha x,y\rangle=\langle x,\alpha y\rangle$;
4. $\langle x,x\rangle\ge 0, \langle x,x\rangle=0 \Leftrightarrow x=0$.

Definiţia 4. Se numeşte ***distanţă*** dintre x şi y numărul:

$$d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+...+(x_n-y_n)^2} .$$

Teorema 3. *Proprietăţi*:

1. $d(x,y)=d(y,x)$;
2. $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$;
3. $d(x,y)\ge 0, d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$.

Scanned with CamScanner

Definiția 5. Se numeşte ***norma*** sau ***lungimea*** vectorului $x \in \mathbb{R}^n$ numărul:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}\ .$$

Teorema 4. *Proprietăți*:

1. $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$;
4. $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$;
5. $\|-x\| = \|x\|$;
6. $d(x, y) = \|x - y\|$.

Definiția 6. Fie intervalele $I_1, I_2, \ldots, I_n \subset \mathbb{R}$. Produsul lor cartezian

$$I = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n =$$
$$= \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 \in I_1, x_2 \in I_2, \ldots, x_n \in I_n\}$$

se numeşte ***interval n-dimensional.***

Definiția 7. Fie $a \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}, r > 0$. Se numeşte ***sferă deschisă*** cu centrul în a şi de rază r mulțimea $V_r(a) = \{x \mid x \in \mathbb{R}^n, d(x,a) < r\}$.

Teorema 5. *Orice sferă cu centrul în a conține un interval n-dimensional ce-l conține pe a şi reciproc, orice asemenea interval conține o sferă cu centrul în a.*

Definiția 8. Se numeşte ***vecinătate*** a unui punct $a \in \mathbb{R}^n$ orice mulțime care conține o sferă deschisă cu centrul în a.

Definiția 9. Punctul $a \in A \subset \mathbb{R}^n$ se numeşte:

1. ***punct interior*** lui A dacă există o vecinătate V a lui a conținută în A $(a \in V \subset A)$;
2. ***punct aderent*** lui A dacă orice vecinătate V a lui a conține puncte din A $(V \cap A \neq \emptyset)$;
3. ***punct de acumulare*** a lui A dacă orice vecinătate V a lui a conține puncte din A diferite de a $(V - \{a\} \cap A \neq \emptyset)$.

Scanned with CamScanner

Definiția 10. O mulțime $A \subset \mathbb{R}^n$ se numește:

1. ***deschisă*** dacă este formată numai din puncte interioare;
2. ***închisă*** dacă este formată numai din puncte aderente;
3. ***mărginită*** dacă există o sferă cu centrul în origine și de rază $r>0$ care conține mulțimea A.

B. FUNCȚII DEFINITE PE MULȚIMI DIN $\mathbb{R}^n$. LIMITE

Definiția 1. Fie $f: X \to Y$ o funcție. Dacă:

1. $X \subset \mathbb{R}, Y \subset \mathbb{R}$, f se numește ***funcție reală de o variabilă reală***;
2. $X \subset \mathbb{R}^n, Y \subset \mathbb{R}$, f se numește ***funcție reală de o variabilă vectorială*** sau ***n variabile reale***;
3. $X \subset \mathbb{R}^n, Y \subset \mathbb{R}^m$, f se numește ***funcție vectorială de variabilă vectorială***.

Definiția 2. Un punct $a \in \mathbb{R}^n$ este limita unui șir (x_m) de puncte din $\mathbb{R}^n$ dacă $\forall \varepsilon > 0\, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\|x_m - a\| < \varepsilon \forall m \geq N(\varepsilon)$.

Definiția 3. Fie $f: X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ și a un punct de acumulare pentru X. Spunem că numărul l este ***limita*** funcției f în punctul a dacă pentru orice vecinătate V a lui l (în $\mathbb{R}$) există o vecinătate W a lui a (în $\mathbb{R}^n$) astfel încât pentru orice $x \in W \cap X, x \neq a$ să avem $f(x) \in V$. Scriem $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

Definiția 4. Se spune că $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ dacă pentru orice șir de puncte (x_m) din X convergent la a, șirul $f(x_m)$ converge la l.

Definiția 5. Se spune că $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ (finită) dacă

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \,|\, |f(x) - l| < \varepsilon$$

pentru $\|x - a\| < \delta(\varepsilon)$ și $x \neq a$.

Scanned with CamScanner

Observația 1:

Definiția 3, definiția 4 şi definiția 5 sunt echivalente.

Definiția 6. Dacă $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(a,b)\in \mathbb{R}^2$, limitele succesive

$$\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,y), \lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y)$$

se numesc ***limite iterate*** ale funcției f când x şi y tind succesiv către a respectiv b.

Teorema 1. *Dacă există limita funcției într-un punct şi una din limitele iterate în acel punct atunci aceste limite sunt egale.*

C. CONTINUITATE

Definiția 1. Fie $f: X\subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a\in X$. Spunem că f este ***continuă*** în a dacă pentru orice vecinătate U a lui $f(a)$ există o vecinătate V a lui a astfel încât pentru $x\in V\cap X$ să avem $f(x)\in U$.

Definiția 2. f este ***continuă*** în a dacă

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0: |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

pentru $\|x-a\| < \delta(\varepsilon)$.

Definiția 3. f este ***continuă*** în a dacă pentru orice şir (x_m) convergent către a şirul $f(x_m)$ este convergent către $f(a)$.

Observația 1:

Definițiile 1, 2 şi 3 sunt echivalente.

Definiția 4. Spunem că funcția $f: X\subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este ***parțial continuă*** în $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ în raport cu variabila x_i dacă funcția parțială $f_i = f(a_1,\ldots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\ldots,a_n)$ este continuă în a_i.

Teorema 1. *Dacă f este continuă global în a, atunci ea este continuă în acel punct în raport cu fiecare variabilă.*

Scanned with CamScanner

5.2. Exerciții rezolvate

1. *Să se stabilească și să se schițeze grafic domeniile de definiție ale funcțiilor:*

a. $f(x,y)=\sqrt{\dfrac{x-1}{2-y}}$;

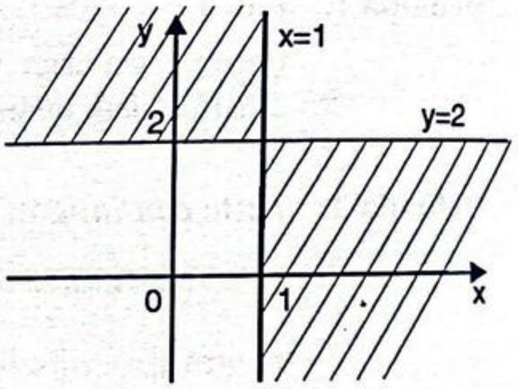
b. $f(x,y)=\ln(x^2+2x-y+1)$;

c. $f(x,y)=\arccos xy$;

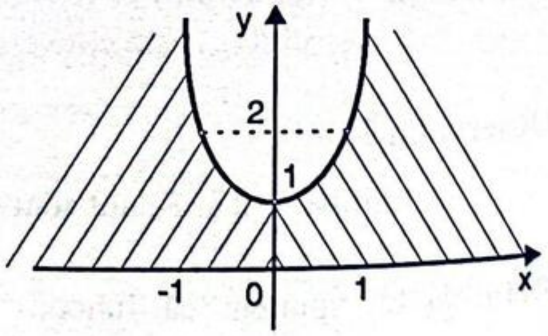
d. $f(x,y)=\sqrt{\dfrac{9-x^2-y^2}{x^2+y^2-4}}$;

Rezolvări:

a. Este necesar ca $\dfrac{x-1}{2-y}\geq 0$, adică $\begin{cases}x-1\geq 0\\2-y>0\end{cases}$ sau $\begin{cases}x-1\leq 0\\2-y<0\end{cases}$ de unde $\begin{cases}x\geq 1\\y<2\end{cases}$ sau $\begin{cases}x\leq 1\\y>2\end{cases}$. Reprezentând grafic dreptele x=1, y=2 obținem o reuniune de intersecții de semiplane.

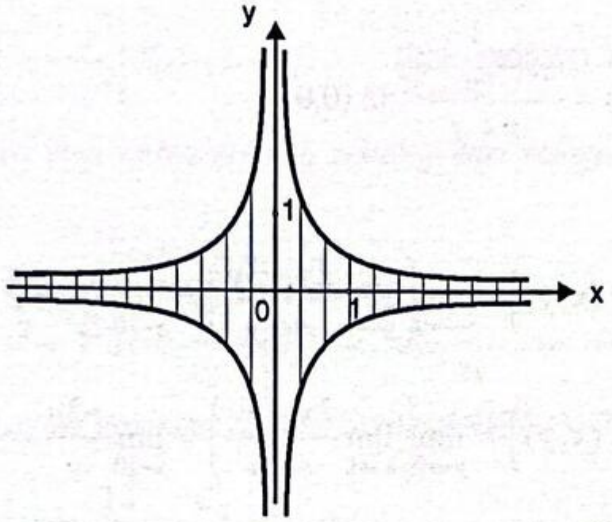


b. Din condiția $x^2+2x-y+1>0$ obținem $y<(x+1)^2$ adică punctele situate în exteriorul parabolei $y=(x+1)^2$.

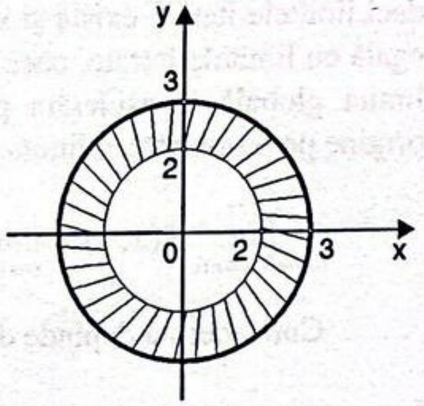


c. Domeniul de definiție este dat de $-1\leq xy\leq 1$. Dacă $x,y\geq 0$ avem $xy\leq 1$, adică $y\leq\dfrac{1}{x}$, ceea ce corespunde punctelor din primul cadran aflate sub hiperbola echilateră $y=\dfrac{1}{x}$. Analog se procedează pentru celelalte cadrane:

Scanned with CamScanner



d. Avem $\dfrac{9-x^2-y^2}{x^2+y^2-4}\geq 0$, adică



$4\leq x^2+y^2\leq 9$ ceea ce corespunde punctelor aflate între cercurile cu centrele în origine şi de raze 2, respectiv 3.

2. *Să se calculeze limitele iterate şi limita globală pentru următoarele funcţii, în punctele indicate:*

a. $f(x,y)=\dfrac{2x-3y}{x+y}$ în (0,0);

b. $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-xy}}$ în (1,1);

c. $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ în (0,0);

d. $f(x,y)=(x^2+y^2)\cos\dfrac{1}{xy}$ în (0,0);

e. $f(x,y)=\left(1+\dfrac{x}{y}\right)^y$ în (a,∞);

Scanned with CamScanner

f. $f(x,y)=\dfrac{x\cos\dfrac{1}{x}+y}{x+y}$ în (0,0).

Rezolvări:

a. $$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)=\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{2x-3y}{x+y}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x}=2,$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)=\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{2x-3y}{x+y}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{-3y}{y}=-3,$$

deci limitele iterate există şi sunt diferite. Dacă ar exista limita globală, ea ar fi egală cu limitele iterate, ceea ce nu se poate. Altfel, pentru a arăta că nu există limita globală, considerăm pe y de forma mx (corespunzător apropierii de origine pe o dreaptă) şi limita:

$$\lim_{x\to 0,\, y=mx} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{2x-3mx}{x+mx}=\frac{2-3m}{1+m}.$$

Cum aceasta depinde de m, rezultă că nu există limita globală.

b. Avem

$$\lim_{x\to 1}\left(\lim_{y\to 1} f(x,y)\right)=\lim_{x\to 1}\left(\lim_{y\to 1}\frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-xy}}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x}}=\sqrt{2},$$

$$\lim_{y\to 1}\left(\lim_{x\to 1} f(x,y)\right)=\lim_{y\to 1}\frac{-\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-xy}}=-\sqrt{2}$$

deci la fel ca la exemplul anterior limita globală nu poate exista.

c. Limitele iterate există şi sunt şi egale:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x}=0,$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)=\lim_{y\to 0}\frac{y^3}{y}=0.$$

Scanned with CamScanner

Cum $0 \le \left|\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}\right| \le |x| + |y|$ şi $\lim\limits_{x \to 0, y \to 0} (|x| + |y|) = 0$, rezultă că $\lim\limits_{x \to 0, y \to 0} f(x, y) = 0$, deci limita globală există şi este desigur egală cu limitele iterate.

d. Cum $\lim\limits_{x \to 0} (x^2 + y^2) \cos \frac{1}{xy} \equiv (x^2 + y^2) \cos \frac{1}{xy}$ nu există pentru $y \neq 0$ rezultă că limitele iterate nu există. Totuşi limita globală există:

$$0 \le (x^2 + y^2) \left|\cos \frac{1}{xy}\right| \le x^2 + y^2 \quad \text{şi}$$

$$\lim_{x \to 0, y \to 0} (x^2 + y^2) = 0$$

de unde rezultă că $\lim\limits_{x \to 0, y \to 0} f(x, y) = 0$.

e. Avem

$$\lim_{x \to a} \left(\lim_{y \to \infty} f(x, y) \right) = \lim_{x \to a} \left(\lim_{y \to \infty} \left(1 + \frac{x}{y}\right)^y \right) =$$

$$= \lim_{x \to a} \left(\lim_{y \to \infty} \left(1 + \frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{x} x} \right) = \lim_{x \to a} e^x = e^a,$$

$$\lim_{y \to \infty} \left(\lim_{x \to a} f(x, y) \right) = \lim_{y \to \infty} \left(1 + \frac{a}{y}\right)^y = \lim_{y \to \infty} \left(1 + \frac{a}{y}\right)^{\frac{y}{a} a} = e^a.$$

Dacă $x \to a$, $y \to \infty$ atunci $\frac{x}{y} \to 0$, deci $\left(1 + \frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{x}} \to e$, de unde

$$\lim_{x \to a, y \to \infty} f(x, y) = \lim_{x \to a, y \to \infty} \left[\left(1 + \frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{x}} \right]^x = e^a.$$

Scanned with CamScanner

f. Avem

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x\cos\frac{1}{x}+y}{x+y}\right) = \lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x} \text{ nu există,}$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x\cos\frac{1}{x}+y}{x+y}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{y}{y} = 1.$$

Limita globală nu există întrucât pentru $y=x$ avem

$$\lim_{x\to 0, y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos\frac{1}{x}+x}{x+x} = \lim_{x\to 0}\frac{1+\cos\frac{1}{x}}{2} \text{ care nu există.}$$

3. *Să se studieze continuitatea globală şi parţială pentru următoarele funcţii:*

a. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0,0)\\ 0, x=y=0;\end{cases}$

b. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0,0)\\ 0, x=y=0;\end{cases}$

c. $f(x,y)=\begin{cases}(1+xy)^{\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}, x>0, y>0\\ 1, x=0 \textit{ sau } y=0;\end{cases}$

d. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x+(y-1)^3}{x^2+(y-1)^2}, (x,y)\neq(0,1)\\ 0, (x,y)=(0,1).\end{cases}$

Rezolvări:

a. Funcţia este evident continuă global în orice punct diferit de (0,0), deci şi parţial. Problema continuităţii se pune în (0,0). Cum $f(x,0)=f(0,y)=0$, funcţia este continuă parţial în (0,0), dar nu este şi continuă global, deoarece

Scanned with CamScanner

$$\lim_{x\to 0,\, y=mx} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2} \text{ depinde de } m.$$

b. Ca şi la exemplul anterior $f(x,0) = f(0,y) = 0$, deci funcţia este continuă parţial în (0,0). Cum

$$0 \le \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \le \frac{x^2+y^2}{2} \quad \text{şi} \quad \lim_{x\to 0, y\to 0} \frac{x^2+y^2}{2} = 0,$$

rezultă că

$$\lim_{x\to 0, y\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0,$$

adică f este continuă global în (0,0).

c. Problema continuităţii se pune în punctele de forma $(a,0)$, $(0,b)$ cu $a,b>0$ cât şi în (0,0). Avem

$$\lim_{x\to a, y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to a, y\to 0} (1+xy)^{\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}} = 1 = f(a,0),$$

$$\lim_{x\to 0, y\to b} f(x,y) = \lim_{x\to 0, y\to b} (1+xy)^{\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}} = 1 = f(0,b) \text{ şi}$$

$$\lim_{x\to 0, y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0, y\to 0} (1+xy)^{\frac{xy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}} = e^{\lim_{x\to 0, y\to 0} \frac{xy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}.$$

Dar $0 \le \frac{xy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \le y\sqrt{x}$ şi $\lim_{x\to 0, y\to 0} y\sqrt{x} = 0$, deci

$$\lim_{x\to 0, y\to 0} \frac{xy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = 0.$$

Rezultă $\lim_{x\to 0, y\to 0} f(x,y) = e^0 = 1$ şi deci f este continuă global peste tot şi implicit şi parţial.

Scanned with CamScanner

d. Avem

$$f(x,1)=\begin{cases}\frac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$$ care nu este continuă în x=0,

$$f(0,y)=\begin{cases}y-1, y\neq 1\\ 0, y=1\end{cases}$$ care este continuă în y=1,

deci avem un exemplu de funcție continuă în raport cu o variabilă, dar nu și în raport cu cealaltă și implicit discontinuă global (în punctul (0,1)).

5.3. Exerciții propuse

1. *Să se stabilească și să se schițeze grafic domeniile de definiție ale funcțiilor:*

a. $f(x,y)=\ln(1-x^2-y^2)$;

b. $f(x,y)=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$;

c. $f(x,y)=\sqrt{4-x^2}\,\ln(1-y^2)$;

d. $f(x,y)=\ln(y^2-4x+8)$;

e. $f(x,y)=\arcsin\dfrac{y}{x}$;

f. $f(x,y)=\arcsin\dfrac{x}{y^2}+\arccos(1-y)$;

g. $f(x,y,z)=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$;

h. $f(x,y)=\sqrt{x}+\sqrt{1-y}+\ln z$.

2. *Să se calculeze limitele iterate și limita globală pentru următoarele funcții, în punctele indicate:*

Scanned with CamScanner

a. $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$;

b. $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2(x-y)^4}$;

c. $f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{y}$;

d. $f(x,y)=(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$;

e. $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$;

f. $f(x,y)=\dfrac{x^2y^3}{x^4+y^4}$;

g. $f(x,y)=\dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$;

h. $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\dfrac{y}{x}$;

i. $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$;

j. $f(x,y)=(1+x^2+y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$;

k. $f(x,y)=(x^2+y^2)^{x^2y^2}$;

l. $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$ în (0,0);

m. $f(x,y)=(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$ în (∞,∞);

n. $f(x,y)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$;

Scanned with CamScanner

o. $f(x,y)=\left(1+\frac{y}{x}\right)^{x}$ în (∞,a).

3. *Să se studieze continuitatea globală şi parţială pentru următoarele funcţii:*

a. $f(x,y)=\begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0,0) \\ 0, (x,y)=(0,0) \end{cases}$;

b. $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^3y^3}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0,0) \\ 0, (x,y)=(0,0) \end{cases}$;

c. $f(x,y)=\begin{cases} \frac{1-\cos(x^3+y^3)}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0,0) \\ 0, (x,y)=(0,0) \end{cases}$;

d. $f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy+x^2y\ln(x+y)}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0,0) \\ 0, (x,y)=(0,0) \end{cases}$;

e. $f(x,y)=\begin{cases} \frac{(x-1)^4+y}{(x-1)^2+y^2}, (x,y)\neq(1,0) \\ 0, (x,y)=(1,0) \end{cases}$;

f. $f(x,y)=\begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0,0) \\ 1, (x,y)=(0,0) \end{cases}$;

g. $f(x,y)=\begin{cases} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}, (x,y)\neq(0,0) \\ 0, (x,y)=(0,0) \end{cases}$.

Scanned with CamScanner

5.4. Indicații şi răspunsuri

1. **a.** interiorul cercului unitate;

b. domeniul cuprins între cercurile C_1 cu centrul în (1,0) şi de rază 1 şi C_2 cu centrul în (1/2,0) şi de rază 1/2;

c. dreptunghiul $[-2,2]\times(-1,1)$;

d. exteriorul parabolei $y^2-4x+8=0$;

e. $-1\le\frac{y}{x}\le 1$;

f. $-y^2\le x\le y^2, 0<y\le 2$;

g. interiorul sferei unitate;

h. $[0,\infty)\times(-\infty,1]\times(0,\infty)$.

2. **a.** $l_{12}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right)=1,\ l_{21}=\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right)=-1,$

$l=\lim\limits_{x\to 0, y\to 0} f(x,y)$ nu există;

b. $l_{12}=l_{21}=0$, l nu există;

c. l_{12} nu există, $l_{21}=0, l=0$;

d. l_{12}, l_{21} nu există, l=0;

e. $l_{12}=l_{21}=0$, l nu există;

f. $l_{12}=l_{21}=l=0$;

g. $l_{12}=l_{21}=l=0$;

h. $l_{12}=l=0, l_{21}$ nu există;

i. $l_{12}=l_{21}=l=2$;

j. $l_{12}=l_{21}=l=1$;

k. $l_{12}=l_{21}=l=1$;

Scanned with CamScanner

l. l_{12}, l_{21}, l nu există;

m. $l_{12} = \lim_{y\to\infty} \frac{y^2}{e^y} = 0 = l_{21}, l = 0$;

n. $l_{12} = l_{21} = l = e$;

o. $l_{12} = l_{21} = l = e^a$.

3. **a.** $0 \le |f(x,y)| \le |xy| \to 0$, f continuă în (0,0) şi deci pe $\mathbb{R}^2$;

b. $0 \le \left|\frac{x^3 y^3}{x^2+y^2}\right| \le |x| + |y| \to 0$, f continuă în (0,0) şi deci pe $\mathbb{R}^2$;

c. $\lim_{x\to 0, y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0, y\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x^3+y^3}{2}}{x^2+y^2} = 0$, f continuă pe $\mathbb{R}^2$;

d. $\lim_{x\to 0, y=mx} f(x,y) = \frac{m}{1+m^2}$, f nu este continuă global în (0,0), dar este continuă în raport cu fiecare variabilă întrucât $f(x,0) = f(0,y) = 0$;

e. f este continuă în raport cu x, dar nu şi în raport cu y, deci nici global în (0,0);

f. continuă pe $\mathbb{R}^2$;

g. f nu este continuă parțial în (0,0) şi deci nici global.

Scanned with CamScanner

6. DERIVATE PARȚIALE. DIFERENȚIALE

6.1. Considerații teoretice

A. DERIVATE PARȚIALE

Definiția 1. Fie $f : X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ şi (a,b) un punct interior lui X. Spunem că funcția f ***are în punctul*** (a,b) ***derivată parțială în raport cu variabila*** x dacă limita

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x,b) - f(a,b)}{x-a}$$

există şi este finită. Această limită se numeşte ***derivata parțială în raport cu x a funcției*** $f(x,y)$ ***în punctul*** (a,b) şi se notează cu $f_x'(a,b)$ sau cu $\dfrac{\partial f(a,b)}{\partial x}$. Analog, ***derivata parțială în raport cu y în punctul*** (a,b) ***a funcției*** $f(x,y)$ este limita

$$\lim_{y \to b} \frac{f(a,y) - f(a,b)}{y-b}$$

dacă există şi este finită. Se notează cu $f_y'(a,b)$ sau $\dfrac{\partial f(a,b)}{\partial y}$.

Teorema 1. *Dacă derivata parțială f_x' (sau f_y') există în punctul (a,b), atunci $f(x,y)$ este continuă în (a,b) în raport cu x (sau y).*

Teorema 2. *Fie (a,b) un punct interior lui X. Dacă funcția f are derivate parțiale f_x' şi f_y' pe o vecinătate V a lui (a,b) atunci pentru orice punct $(x,y) \in V$ există un număr ξ cuprins între a şi x şi un număr η cuprins între b şi y astfel încât:*

$$f(x,y) - f(a,b) = f_x'(\xi, y)(x-a) + f_y'(x,\eta)(y-b).$$

Scanned with CamScanner

Teorema 3. *Fie (a,b) un punct interior lui X. Dacă funcția f are derivate parțiale mărginite într-o vecinătate a lui (a,b), atunci ea este continuă în (a,b).*

Definiția 2. Fie $f(x,y)$ o funcție reală de două variabile definită pe $X \subset \mathbb{R}^2$ și care admite derivate parțiale f_x' și f_y' (numite și ***de ordinul întâi***) în fiecare punct $(x,y) \in X$. Dacă există derivatele parțiale ale funcțiilor f_x' și f_y' spunem că acestea sunt ***derivatele parțiale de ordinul doi ale funcției*** *f* și le vom nota astfel:

$$f_{x^2}'' = (f_x')_x' = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

$$f_{xy}'' = (f_x')_y' = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},$$

$$f_{yx}'' = (f_y')_x' = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},$$

$$f_{y^2}'' = (f_y')_y' = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Criteriul lui Schwarz

Dacă funcția f(x,y) are derivate parțiale mixte de ordinul al doilea f_{xy}'' *și* f_{yx}'' *într-o vecinătate V a unui punct (a,b) din X și dacă* f_{xy}'' *și* f_{yx}'' *sunt continue în (a,b), atunci* $f_{xy}''(a,b) = f_{yx}''(a,b)$.

B. DIFERENȚIABILITATE

Definiția 1. Fie $f(x,y)$ o funcție de două variabile, definită pe $X \subset \mathbb{R}^2$ și (a,b) un punct interior lui X. Spunem că funcția $f(x,y)$ este ***diferențiabilă în punctul*** (a,b) dacă există două numere reale λ și μ și o funcție $\omega(x,y)$ definită pe X, continuă în punctul (a,b) și nulă în acel punct, adică

$$\lim_{x \to a,\, y \to b} \omega(x,y) = \omega(a,b) = 0$$

Scanned with CamScanner

astfel încât pentru orice $(x,y)\in X$ să avem:

$$f(x,y)-f(a,b)=$$
$$=\lambda(x-a)+\mu(y-b)+\omega(x,y)\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}.$$

Lema 1. *Dacă funcția $\omega(x,y)$ definită pe $X\subset\mathbb{R}^2$ are limita 0 în punctul (a,b), atunci există două funcții ω_1 și ω_2 definite pe X care au limita 0 în (a,b) și care verifică egalitatea*

$$\omega(x,y)\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=$$
$$=\omega_1(x,y)(x-a)+\omega_2(x,y)(y-b)$$

și reciproc.

Teorema 1. *Dacă funcția f este diferențiabilă în punctul (a,b) atunci ea admite derivate parțiale în (a,b) și $\lambda=f_x'(a,b),\mu=f_y'(a,b)$.*

Teorema 2. *Dacă funcția f este diferențiabilă în punctul (a,b) atunci f este continuă în acel punct.*

Teorema 3. *Dacă funcția f are derivate parțiale f_x' și f_y' într-o vecinătate V a lui (a,b) și dacă aceste derivate sunt continue în (a,b), atunci funcția f este diferențiabilă în (a,b).*

Definiția 2. Numim ***diferențiala unei funcții*** $f(x,y)$ ***în punctul*** (a,b) și o notăm cu $df(a,b)(x,y)$, funcția liniară de două variabile $(x-a)$, respectiv $(y-b)$:

$$df(a,b)(x,y)=f_x'(a,b)(x-a)+f_y'(a,b)(y-b),$$

adică partea liniară a funcției *f*.

Observația 1:

Notând creșterile variabilelor x și y, respectiv prin $dx=x-a$ și $dy=y-b$, putem scrie:

$$df(a,b)(x,y)=f_x'(a,b)dx+f_y'(a,b)dy.$$

Dacă funcția *f* este diferențiabilă pe toată mulțimea X atunci diferențiala sa într-un punct arbitrar (x,y) din X se scrie:

Scanned with CamScanner

$$df(x,y) = f_x'(x,y)dx + f_y'(x,y)dy$$

sau formal,

$$df = f_x'dx + f_y'dy$$

sau

$$df = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)f,$$

relație care pune în evidență operatorul de diferențiere

$$d = \frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy.$$

Observația 2:

Pentru o funcție de n variabile $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ putem scrie operatorul de diferențiere ca fiind

$$d = \frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n$$

şi diferențiala de ordinul întâi

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i.$$

Definiția 3. Spunem că f este ***diferențiabilă de două ori în*** (a,b) sau că admite ***diferențială de ordinul doi în*** (a,b) dacă toate derivatele parțiale de ordinul I există într-o vecinătate V a lui (a,b) şi sunt diferențiabile în (a,b). Notăm diferențiala de ordinul doi cu

$$d^2 f(a,b) = d[df(a,b)] = d\left[\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right].$$

Observația 3:

Putem scrie

$$d^2 f = f_{x^2}''dx^2 + d_{xy}''dxdy + f_{y^2}''dy^2$$

sau

Scanned with CamScanner

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2$$

punând în evidenţă operatorul de diferenţiere de ordinul doi:

$$d^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2}{\partial y^2} dy^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^{(2)} .$$

Definiţia 4. Spunem că funcţia $f(x,y)$ este ***diferenţiabilă de n ori în punctul*** (a,b) sau că are ***diferenţială de ordinul n în*** (a,b), dacă toate derivatele parţiale de ordinul n-1 ale funcţiei există într-o vecinătate V a lui (a,b) şi sunt diferenţiabile în (a,b)

$$d^n f(a,b) = d[d^{n-1} f(a,b)] = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial x} dy \right)^{(n)} f.$$

C. FUNCŢII COMPUSE

Definiţia 1. Fie $x=x(t)$, $y=y(t)$ două funcţii de o variabilă t, definite pe intervalul (a,b), m, M, respectiv m', M', marginile funcţiilor $x(t)$, $y(t)$ în intervalul (a,b).
Fie $f(x,y)$ o funcţie definită pe intervalul $(m, M) \times (m', M')$.
Funcţia $F(t) = f(x(t), y(t))$ obţinută prin înlocuirea variabilelor x, y cu funcţiile $x=x(t)$, $y=y(t)$ se numeşte ***funcţie compusă de t prin intermediul lui x şi y.***

Teorema 2. *Fie X, Y două mulţimi deschise din $\mathbb{R}^2$, u(x,y), v(x,y) două funcţii reale de variabile reale definite pe X astfel încât $u(x, y)$, $v(x, y)) \in Y$ pentru orice $(x, y) \in X$ şi diferenţiabile în punctul $(a,b) \in X$. Fie g(u,v) o funcţie reală definită pe Y, diferenţiabilă în punctul (u(a,b),v(a,b)).*
Atunci funcţia compusă f(x,y)=g(u(x,y),v(x,y)) este diferenţiabilă în (a,b) şi

$$f_x'(a,b) = g_u'(c,d)u_x'(a,b) + g_v'(c,d)v_x'(a,b)$$

$$f_y'(a,b) = g_u'(c,d)u_y'(a,b) + g_v'(c,d)v_y'(a,b)$$

unde (c,d)=(u(a,b),v(a,b)).

Scanned with CamScanner

Observația 1:

Simbolic, relațiile de mai sus se scriu astfel:

$$f_x' = g_u' u_x' + g_v' v_x', \quad f_y' = g_u' u_y' + g_v' v_y'$$

sau

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

D. FUNCȚII OMOGENE

Definiția 1. Mulțimea $X \subset \mathbb{R}^n$ se numește ***con*** dacă $\forall x \in X : tx \in X \forall t > 0$.

Definiția 2. Fie $X \subset \mathbb{R}^n$ un con și $f : X \to \mathbb{R}$ o funcție reală. Spunem că funcția *f* este ***omogenă de grad k*** dacă

$$\forall t > 0 \forall x \in X : f(tx) = t^k f(x)$$

adică

$$f(tx_1, tx_2, ..., tx_n) = t^k f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Teorema lui Euler

Dacă funcția $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este omogenă de grad k și diferențiabilă într-un punct $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq 0$, atunci are loc egalitatea

$$a_1 f_{x_1}'(a) + a_2 f_{x_2}'(a) + \ldots + a_n f_{x_n}'(a) = kf(a).$$

Reciproca teoremei lui Euler

Dacă funcția f(x) este diferențiabilă în orice punct $x \neq 0$ din X și în aceste puncte verifică relația din teorema lui Euler, atunci funcția f este omogenă de grad k.

E. FORMULA LUI TAYLOR

Definiția 1. Fie $f(x,y)$ o funcție reală de două variabile definită pe $X \subset \mathbb{R}^2$, diferențiabilă de n ori în punctul $(a,b) \in X$. Se numește ***polinom Taylor*** de gradul n atașat funcției $f(x,y)$ în punctul (a,b) și notat cu $T_n(x,y)$ expresia:

Scanned with CamScanner

$$T_n(x,y) = f(a,b) + \frac{1}{1!}df(a,b) + \frac{1}{2!}d^2 f(a,b) + \ldots + \frac{1}{n!}d^n f(a,b),$$

unde $d^k f(a,b)$ este diferențiala de ordinul k, $1 \le k \le n$, a funcției $f(x,y)$ în punctul (a,b).

Definiția 2. Egalitatea $f(x,y) = T_n(x,y) + R_n(x,y)$ se numeşte ***formula lui Taylor*** de ordinul n corespunzătoare funcției $f(x,y)$ în punctul (a,b), iar funcția $R_n(x,y)$ se numeşte ***restul*** de ordinul n al formulei lui Taylor.

Teorema 1. *Dacă funcția $f(a,b)$ este diferențiabilă de $(n+1)$ ori într-o vecinătate V a lui (a,b), atunci pentru orice punct $(x,y) \in V$, există un punct $(\xi,\eta) \in V$ pe segmentul ce uneşte (a,b) şi (x,y) astfel încât*

$$R_n(x,y) = \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(\xi,\eta),$$

unde

$$d^{n+1} f(\xi,\eta) = \left[\frac{\partial}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial}{\partial y}(y-b)\right]^{(n+1)} f(\xi,\eta).$$

6.2. Exerciții rezolvate

1. *Pornind de la definiție, să se calculeze:*

a. $f_x'(1,1), f_y'(1,1)$ *dacă* $f(x,y) = \ln(1+x+y^2)$;

b. $f_x'(-2,2), f_y'(-2,2), f_{xy}''(-2,2)$ *dacă* $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2 y}$;

c. $f_{xy}''(-\pi/4,0)$ *dacă* $f(x,y) = x\sin(x+y)$.

Rezolvări:

a. În baza definiției avem:

$$f_x'(1,1) = \lim_{x\to 1}\frac{f(x,1)-f(1,1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\ln(2+x)-\ln 3}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{2+x}}{1} = \frac{1}{3},$$

Scanned with CamScanner

$$f_y'(1,1)=\lim_{x\to1}\frac{f(1,y)-f(1,1)}{y-1}=\lim_{x\to1}\frac{\ln(2+y^2)-\ln 3}{y-1}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{2y}{2+y^2}}{1}=\frac{2}{3}.$$

b. Procedând ca mai sus, avem:

$$f_x'(-2,2)=\lim_{x\to-2}\frac{f(x,2)-f(-2,2)}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt[3]{2x^2}-2}{x+2}=$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{\frac{1}{3}(2x^2)^{-\frac{2}{3}}\cdot 4x}{1}=-\frac{2}{3},$$

$$f_y'(-2,2)=\lim_{y\to2}\frac{f(-2,y)-f(-2,2)}{y-2}=\lim_{y\to2}\frac{\sqrt[3]{4y}-2}{y-2}=$$

$$=\lim_{y\to2}\frac{\frac{1}{3}(4y)^{-\frac{2}{3}}\cdot 4}{1}=\frac{1}{3},$$

$$f_x'(-2,y)=\lim_{x\to-2}\frac{f(x,y)-f(-2,y)}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt[3]{x^2y}-\sqrt[3]{4y}}{x+2}=$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{1}{3}(x^2y)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2xy=-\frac{4}{3}y(4y)^{-\frac{2}{3}}=-\frac{1}{3}(4y)^{\frac{1}{3}},$$

deci

$$f_{xy}''(-2,2)=\lim_{y\to2}\frac{-\frac{1}{3}(4y)^{\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}}{y-2}=\lim_{y\to2}\left[-\frac{1}{9}(4y)^{-\frac{2}{3}}\cdot 4\right]=-\frac{1}{9}.$$

c. $$f_{xy}''\left(\frac{\pi}{4},0\right)=(f_x')_y'\left(\frac{\pi}{4},0\right)=\lim_{y\to0}\frac{f_x'\left(\frac{\pi}{4},y\right)-f_x'\left(\frac{\pi}{4},0\right)}{y},$$

$$f_x'\left(\frac{\pi}{4},y\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{f(x,y)-f\left(\frac{\pi}{4},y\right)}{x-\frac{\pi}{4}}=$$

Scanned with CamScanner

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{x\sin(x+y) - \frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4}+y\right)}{x - \frac{\pi}{4}} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} [\sin(x+y) + x\cos(x+y)] = \sin\left(\frac{\pi}{4}+y\right) + \frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}+y\right)$$

$$f_x^{'}\left(\frac{\pi}{4},0\right) = \sin\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\frac{\pi}{4}\right),$$

$$f_{xy}^{''}\left(\frac{\pi}{4},0\right) = \lim_{y \to 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+y\right) + \frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}+y\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\frac{\pi}{4}\right)}{y} =$$

$$= \lim_{y \to 0}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+y\right) - \frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4}+y\right)\right] =$$

$$= \cos\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right).$$

2. *Să se arate că funcțiile următoare nu sunt continue în origine, dar admit derivate parțiale $f_x^{'}$ și $f_y^{'}$ în acest punct:*

a. $f(x,y) = \begin{cases} 1, x \neq 0, y \neq 0 \\ 0, x = 0 \ sau \ y = 0 \end{cases}$;

b. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Rezolvări:

a. Avem $\lim\limits_{x \to 0, y = x} f(x,y) = 1 \neq 0 = f(0,0)$, deci f nu este continuă în $(0,0)$.

Apoi

$$f_x^{'}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0$$

și

$$f_y^{'}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0,$$

Scanned with CamScanner

deci nu orice funcţie care admite derivate parţiale de ordinul întâi într-un punct este continuă în acel punct.

b. Cum $\lim\limits_{x\to 0, y=mx} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2 m}{x^2(1+m^2)} = \dfrac{2m}{1+m^2} \neq 0$, f nu este continuă în (0,0). Apoi $f_x^{'}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0 = f_y^{'}(0,0)$.

3. *Să se studieze continuitatea şi existenţa derivatelor parţiale de ordinul al doilea mixte, în origine, pentru următoarele funcţii:*

a. $f(x,y) = \begin{cases} y^2 \ln\left(1+\dfrac{x^2}{y^2}\right), y \neq 0 \\ 0, y = 0 \end{cases}$;

b. $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$;

c. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Rezolvări:

a. Cum $\ln(1+z) < z$ pentru $z>0$, avem că $0 < y^2 \ln\left(1+\dfrac{x^2}{y^2}\right) < y^2 \dfrac{x^2}{y^2} = x^2$ şi cum $\lim\limits_{x\to 0, y\to 0} x^2 = 0$, rezultă că f este continuă în origine. Derivatele parţiale de ordinul doi mixte, în origine, sunt date de:

$$f_{xy}^{''}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f_x^{'}(0,y) - f_x^{'}(0,0)}{y}$$

şi

$$f_{yx}^{''}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f_x^{'}(x,0) - f_x^{'}(0,0)}{x},$$

unde

Scanned with CamScanner

$$f_x'(0,y)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{y^2\ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0} y^2\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{2x}{y^2}=0,$$

$$f_x'(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$$

$$f_y'(x,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(x,y)-f(x,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{y^2\ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)}{y}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)}{\frac{1}{y}}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{y^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{-2x^2}{y^3}}{-\frac{1}{y^2}}=\lim_{y\to 0}\frac{2x^2y}{x^2+y^2}=0,$$

$$f_y'(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0.$$

Rezultă că $f_{xy}''(0,0)=f_{yx}''(0,0)=0$.

b. Funcția este continuă în origine deoare $0\le|f(x,y)|\le|xy|$ și $\lim_{x\to 0,y\to 0}|xy|=0$. Pornind de la definiția derivatelor parțiale putem scrie:

$$f_{xy}''(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f_x'(0,y)-f_x'(0,0)}{y},$$

$$f_{yx}''(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f_x'(x,0)-f_x'(0,0)}{x},$$

$$f_x'(0,y)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x}=\lim_{x\to 0} y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=-y,$$

$$f_x'(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}0=0,$$

Scanned with CamScanner

$$f_y'(x,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(x,y) - f(x,0)}{y} = \lim_{y\to 0} x\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = x,$$

$$f_y'(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0.$$

Deci $f_{xy}''(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{-y}{y} = -1$ şi $f_{yx}''(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$. Explicaţia faptului că sunt diferite este că f_{xy}'' şi f_{yx}'' nu sunt continue.

c. Am văzut la exerciţiul 2*b* că funcţia nu este continuă în origine, dar admite derivate parţiale de ordinul întâi $f_x'(0,0) = f_y'(0,0) = 0$. Cercetăm dacă există şi este finită $\lim_{y\to 0} \frac{f_x'(0,y) - f_x'(0,0)}{y}$. Avem

$$f_x'(0,y) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,y) - f(0,y)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2y}{x^2 + y^2} = \frac{2}{y}$$

şi deci

$$f_{xy}''(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{2}{y^2} = \infty,$$

deci nu este finită. La fel şi $f_{yx}''(0,0)$.

4. *Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul întâi şi al doilea pentru următoarele funcţii:*

a. $f(x,y) = x^3 \sin^2 y$;

b. $f(x,y) = x^{y^2}$;

c. $f(x,y) = arctg\, \frac{x-y}{1+xy}$;

d. $f(x,y,z) = \arcsin \frac{y}{x^z}$.

Scanned with CamScanner

Rezolvări:

a. Avem

$$f_x'(x,y) = (x^3 \sin^2 y)_x' = 3x^2 \sin^2 y,$$

$$f_y'(x,y) = (x^3 \sin^2 y)_y' = 2x^3 \sin y \cos y = x^3 \sin 2y,$$

$$f_{x^2}''(x,y) = (f_x'(x,y))_x' = (3x^2 \sin^2 y)_x' = 6x \sin^2 y,$$

$$f_{y^2}''(x,y) = (f_y'(x,y))_y' = (x^3 \sin 2y)_y' = 2x^3 \cos 2y,$$

$$f_{xy}''(x,y) = f_{yx}''(x,y) = (f_x'(x,y))_y' = (3x^2 \sin^2 y)_y' =$$
$$= 6x^2 \sin y \cos y = 3x^2 \sin 2y.$$

b. În raport cu x funcția f este funcție putere, iar în raport cu y este funcție exponențială, deci:

$$f_x'(x,y) = \left(x^{y^2}\right)_x' = y^2 x^{y^2-1},$$

$$f_y'(x,y) = \left(x^{y^2}\right)_y' = x^{y^2} \ln x \cdot 2y,$$

$$f_{x^2}''(x,y) = (f_x'(x,y))_x' = (y^2 x^{y^2-1})_x' = y^2(y^2-1)x^{y^2-2},$$

$$f_{y^2}''(x,y) = (f_y'(x,y))_y' = (2yx^{y^2} \ln x)_y' = 2x^{y^2} \ln x + 4y^2 x^{y^2} \ln^2 x,$$

$$f_{xy}''(x,y) = f_{yx}''(x,y) = (f_x'(x,y))_x' = (y^2 x^{y^2-1})_y' =$$
$$= 2yx^{y^2-1} + 2y^3 x^{y^2-1} \ln x.$$

c. Avem

$$f_x'(x,y) = \frac{1}{1+\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)^2} \cdot \left(\frac{x-y}{1+xy}\right)_x' =$$
$$= \frac{(1+xy)^2}{(1+xy)^2 + (x-y)^2} \cdot \frac{(x-y)_x'(1+xy) - (x-y)(1+xy)_x'}{(1+xy)^2} =$$

Scanned with CamScanner

$$=\frac{1+xy-(x-y)y}{(1+xy)^2+(x-y)^2}=\frac{1+y^2}{(1+x^2)(1+y^2)}=\frac{1}{1+x^2},$$

$$f_y'(x,y)=-\frac{1}{1+y^2},$$

$$f_{x^2}''(x,y)=\left(\frac{1}{1+x^2}\right)_x'=-\frac{2x}{(1+x^2)^2},$$

$$f_{y^2}''(x,y)=\left(-\frac{1}{1+y^2}\right)_y'=\frac{2y}{(1+y^2)^2},$$

$$f_{xy}''(x,y)=f_{yx}''(x,y)=\left(\frac{1}{1+x^2}\right)_y'=0.$$

d. Avem

$$f_x'(x,y,z)=\left(\arcsin\frac{y}{xz}\right)_x'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2z^2}}}\cdot\left(-\frac{y}{x^2z}\right)=-\frac{y}{x\sqrt{x^2z^2-y^2}},$$

$$f_y'(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2z^2-y^2}},$$

$$f_z'(x,y,z)=-\frac{y}{z\sqrt{x^2z^2-y^2}},$$

$$f_{x^2}''(x,y,z)=\frac{y\left(x\sqrt{x^2z^2-y^2}\right)_x'}{x^2(x^2z^2-y^2)}=\frac{y\left(\sqrt{x^2z^2-y^2}+x\frac{2xz^2}{2\sqrt{x^2z^2-y^2}}\right)}{x^2(x^2z^2-y^2)}=$$

$$=\frac{y(2x^2z^2-y^2)}{x^2(x^2z^2-y^2)^{3/2}},$$

$$f_{y^2}''(x,y,z)=\frac{y}{(x^2z^2-y^2)^{3/2}},$$

Scanned with CamScanner

$$f''_{z^2}(x,y,z)=\frac{y(2z^2x^2-y^2)}{z^2(x^2z^2-y^2)^{3/2}},$$

$$f''_{xy}(x,y,z)=-\frac{2xz^2}{(x^2z^2-y^2)^{3/2}},$$

$$f''_{xz}(x,y,z)=\frac{xyz}{(x^2z^2-y^2)^{3/2}},$$

$$f''_{yz}(x,y,z)=-\frac{zx^2}{(x^2z^2-y^2)^{3/2}}.$$

5. *Pornind de la definiție, să se cerceteze dacă funcțiile următoare sunt diferențiabile în punctele indicate:*

a. $f(x,y)=x^3+xy+y^2$ în $M(1,1)$;

b. $f(x,y)=xy^2+x^2y+3xy$ în $M(0,2)$;

c. $f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0,0) \\ 0, (x,y)=(0,0) \end{cases}$ în $O(0,0)$;

d. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, (x,y)\neq(0,0) \\ 0, (x,y)=(0,0) \end{cases}$ în $O(0,0)$.

Rezolvări:

a. Calculând variația funcției f, obținem:

$$\begin{aligned}\Delta f(1,1;h,k)&=f(1+h,1+k)-f(1,1)=\\&=(1+h)^3+(1+h)(1+k)+(1+k)^2-3=\\&=h^3+3h^2+4h+k^2+3k+hk=\\&=4h+3k+(3h+h^2)h+(h+k)k\,.\end{aligned}$$

Cum $\lim\limits_{h\to0,k\to0}(3h+h^2)=\lim\limits_{h\to0,k\to0}(h+k)=0$, rezultă că f este diferențiabilă în $(1,1)$ și $df(1,1)=4dx+3dy$.

Scanned with CamScanner

b. Avem

$$\Delta f(0,2;h,k) = f(h,2+k) - f(0,2) =$$
$$= h(2+k)^2 + h^2(2+k) + 3h(2+k) =$$
$$= 10h + 0 \cdot k + h(7k+2h) + k(hk+h^2).$$

Cum $\lim\limits_{h\to 0, k\to 0}(7k+2h) = \lim\limits_{h\to 0, k\to 0}(4k+h^2) = 0$, rezultă că f este diferențiabilă în $(0,2)$ şi $df(0,2) = 10dx$.

c. Avem

$$\Delta f(0,0;h,k) = hk\frac{h^2-k^2}{h^2+k^2} = 0 \cdot h + 0 \cdot k + hk \cdot \frac{h^2-k^2}{(h^2+k^2)^{3/2}}\sqrt{h^2+k^2}.$$

Pentru ca f să fie diferențiabilă în (0,0) este suficient să arătăm că

$$\lim_{h\to 0, k\to 0}\frac{hk(h^2-k^2)}{(h^2+k^2)^{3/2}} = 0.$$

Dar

$$0 \le \left|\frac{hk(h^2-k^2)}{(h^2+k^2)^{3/2}}\right| \le \frac{|hk|}{(h^2+k^2)^{1/2}} \le (h^2+k^2)^{1/2}$$

şi

$$\lim_{h\to 0, k\to 0}\sqrt{h^2+k^2} = 0,$$

deci f este diferențiabilă în (0,0) şi $df(0,0)=0$.

d. Avem $f_x'(0,0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0 = f_y'(0,0)$. Dacă f ar fi diferențiabilă în (0,0), ar exista o funcție $\omega(x,y)$ continuă şi nulă în origine astfel încât

$$f(x,y) - f(0,0) = f_x'(0,0)x + f_y'(0,0)y + \omega(x,y)\sqrt{x^2+y^2}.$$

Dar

$$f(x,y) - f(0,0) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \cdot x + 0 \cdot y + \frac{xy}{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2},$$

deci

Scanned with CamScanner

$$\omega(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0,0)\\ 0, (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

Cum $\lim\limits_{x\to 0, y=mx}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{mx^2}{x^2+m^2x^2}=\dfrac{m}{1+m^2}\neq 0$ rezultă că $\omega(x,y)$ nu este continuă în (0,0), deci f nu este diferențiabilă în acest punct.

6. *Să se calculeze valoarea aproximativă a numărului $1,02^{3,01}$, înlocuind variația unei funcții cu diferențiala ei.*

Rezolvare:

Fie $f(x,y)=x^y$ şi alegem a=1, b=3, h=0,02, k=0,01.

Avem $\Delta f(1,2;(0,02),(0,01))=f(1,02;3,01)-f(1,3)\approx df(1,3)(0,02;0,01)$.

Dar $df(a,b)(h,k)=ba^{b-1}h+a^b\ln ak=3\cdot 1\cdot 0,02+1\cdot\ln 1\cdot 0,01=0,06$, prin urmare

$$f(1,02;3,01)\approx 1+0,06=1,06.$$

7. *Să se scrie formula lui Taylor de ordinul al doilea pentru următoarele funcții, în punctele indicate:*

a. $f(x,y)=x^3-2y^3+3xy$ *în* (1,2);

b. $f(x,y)=e^x\sin y$ *în* (0,0).

Rezolvări:

a. Avem

$$f(x,y)=f(a,b)+\frac{1}{1!}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-a)+\frac{\partial}{\partial y}(y-b)\right]f(a,b)+$$

$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-a)+\frac{\partial}{\partial y}(y-b)\right]^{(2)}f(a,b)+R_2(x,y),$$

cu $R_2(x,y)=\dfrac{1}{3!}\left[\dfrac{\partial}{\partial x}(x-a)+\dfrac{\partial}{\partial y}(y-b\right]^{(3)}f(\xi,\eta)$. Dezvoltat, formula se poate scrie

Scanned with CamScanner

$$f(x,y)=f(a,b)+\frac{1}{1!}\left[\frac{\partial f(a,b)}{\partial x}(x-a)+\frac{\partial f(a,b)}{\partial y}(y-b)\right]+$$

$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2}(x-a)^2+2\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x\partial y}(x-a)(y-b)+\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2}(y-b)^2\right]+$$

$$+\frac{1}{3!}\left[\frac{\partial^3 f(\xi,\eta)}{\partial x^3}(x-a)^3+3\frac{\partial^3 f(\xi,\eta)}{\partial^2 x\partial y}(x-a)^2(y-b)+3\frac{\partial^3 f(\xi,\eta)}{\partial x\partial^2 y}(x-a)(y-b)^2\right]+$$

$$+\frac{1}{3!}\left[\frac{\partial^3 f(\xi,\eta)}{\partial^3 y}(y-b)^3\right].$$

Dar

$$f_x^{'}=3x^2+3y,\ f_y^{'}=-6y^2+3x\ ,$$

$$f_{x^2}^{''}=6x,\ f_{y^2}^{''}=-12y,\ f_{xy}^{''}=3\ ,$$

$$f_{x^2}^{'''}=6,\ f_{y^2}^{'''}=-12,\ f_{x^2y}^{'''}=f_{xy^2}^{'''}=0\ ,$$

deci

$$f_x^{'}(1,2)=9,\ f_y^{'}(1,2)=-21\ ,$$

$$f_{x^2}^{''}(1,2)=6,\ f_{y^2}^{''}(1,2)=-24,\ f_{xy}^{''}(1,2)=3\ ,$$

$$f_{x^3}^{'''}(\xi,\eta)=6,\ f_{y^3}^{'''}(\xi,\eta)=-12,\ f_{x^2y}^{'''}(\xi,\eta)=f_{xy^2}^{'''}(\xi,\eta)=0\ .$$

Prin urmare formula se scrie astfel:

$$f(x,y)=-9+\frac{1}{1!}[9(x-1)-21(y-2)]+$$
$$+\frac{1}{2!}[6(x-1)^2+6(x-1)(y-2)-24(y-2)^2]+$$
$$+\frac{1}{3!}[6(x-1)^3-12(y-2)^3].$$

b. Avem

$$f_x^{'}=e^x\sin y,\ f_y^{'}=e^x\cos y\ ,$$

$$f_{x^2}^{''}=e^x\sin y,\ f_{y^2}^{''}=-e^x\sin y,\ f_{xy}^{''}=e^x\cos y\ ,$$

Scanned with CamScanner

deci

$$f'_x(0,0) = 0,\ f'_y(0,0) = 1\,,$$

$$f''_{x^2}(0,0) = 0,\ f''_{y^2}(0,0) = 0,\ f''_{xy}(0,0) = 1\,,$$

$$f'''_{x^3}(\xi,\eta) = e^{\xi}\sin\eta,\ f'''_{y^3}(\xi,\eta) = -e^{\xi}\cos\eta\,,$$

$$f'''_{x^2y}(\xi,\eta) = e^{\xi}\cos\eta,\ f'''_{xy^2}(\xi,\eta) = -e^{\xi}\sin\eta\,.$$

Prin urmare formula se scrie astfel:

$$f(x,y) = \frac{1}{1!}y + \frac{1}{2!}2xy +$$
$$+\frac{1}{3!}(e^{\xi}\sin\eta\cdot x^3 + 3e^{\xi}\cos\eta\cdot x^2y - 3e^{\xi}\sin\eta\cdot xy^2 - e^{\xi}\cos\eta\cdot y^3).$$

8. *Folosind formula lui Taylor de ordinul al doilea, să se calculeze valoarea aproximativă a numărului $(0,95)^{2,01}$.*

Rezolvare:

Fie $f(x,y) = x^y$. Scriem formula lui Taylor în punctul (1,2), pentru $h = x - a = -0,05,\ k = y - b = 0,01$:

$$(0,95)^{2,01} = f(1+h,2+k) = f(1,2) + \frac{1}{1!}[f'_x(1,2)h + f'_y(1,2)k] +$$
$$+\frac{1}{2!}[f''_{x^2}(1,2)h^2 + 2f''_{xy}(1,2)hk + f''_{y^2}(1,2)k^2] + R_2\,.$$

Cum

$$f'_x = yx^{y-1},\ f'_y = x^y\ln x\,,$$

$$f''_{x^2} = y(y-1)x^{y-2},\ f''_{xy} = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x,\ f''_{y^2} = x^y\ln^2 x\,,$$

obținem

$$(0,95)^{2,01} \approx 1 + \frac{1}{1!}(-2\cdot 0,05) + \frac{1}{2!}(2\cdot 0,0025 - 2\cdot 0,0005) = 0,902\,.$$

Scanned with CamScanner

9. *Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul întâi și doi ale următoarelor funcții compuse:*

a. $f(x,y,z) = g(2x + y^2 + e^z)$;

b. $f(x,y) = g(x + y, xy)$;

c. $f(x,y,z) = g(x, xy, xyz)$, *unde se presupune că g este diferențiabilă de două ori.*

Rezolvări:

a. Fie $u(x,y,z) = 2x + y^2 + e^z$. Avem

$$f_x^{'} = g'(u)u_x^{'} = 2g'(u),$$

$$f_y^{'} = g'(u)u_y^{'} = 2yg'(u),$$

$$f_z^{'} = g'(u)u_z^{'} = e^z g'(u),$$

$$f_{x^2}^{''} = (2g'(u))_x^{'} = 2g''(u)u_x^{'} = 4g''(u),$$

$$f_{y^2}^{''} = (2yg'(u))_y^{'} = 2g'(u) + 2yg'(u)u_y^{'} = 2g'(u) + 4y^2 g''(u),$$

$$f_{z^2}^{''} = (e^z g'(u))_z^{'} = e^z g'(u) + e^z g''(u)u_z^{'} = e^z g'(u) + e^{2z} g''(u),$$

$$f_{xy}^{''} = (2g'(u))_y^{'} = 2g''(u)u_y^{'} = 4yg''(u),$$

$$f_{xz}^{''} = (2g'(u))_z^{'} = 2g''(u)u_z^{'} = 2e^z g''(u),$$

$$f_{yz}^{''} = (2yg'(u))_z^{'} = 2yg''(u)u_z^{'} = 2ye^z g''(u).$$

b. Fie $u(x,y) = x + y, v(x,y) = xy$. Avem

$$f_x^{'} = g_u^{'}u_x^{'} + g_v^{'}v_x^{'} = g_u^{'} + yg_v^{'},$$

$$f_y^{'} = g_u^{'}u_y^{'} + g_v^{'}v_y^{'} = g_u^{'} + xg_v^{'},$$

$$f_{x^2}^{''} = (g_u^{'} + yg_v^{'})_x^{'} = (g_u^{'})_u^{'}u_x^{'} + (g_u^{'})_v^{'}v_x^{'} + y(g_v^{'})_u^{'}u_x^{'} + y(g_v^{'})_v^{'}v_x^{'} =$$
$$= g_{u^2}^{''} + 2yg_{uv}^{''} + y^2 g_{v^2}^{''},$$

Scanned with CamScanner

$$f''_{y^2} = (g'_u + xg'_v)'_y = (g'_u)'_u u'_y + (g'_u)'_v v'_y + x(g'_v)'_u u'_y + x(g'_v)'_v v'_y =$$
$$= g''_{u^2} + 2xg''_{uv} + x^2 g''_{v^2},$$

$$f''_{xy} = f''_{yx} = (g'_u + yg'_v)'_y =$$
$$= (g'_u)'_u u'_y + (g'_u)'_v v'_y + g'_v + y(g'_v)'_u u'_y + y(g'_v)'_v v'_y =$$
$$= g''_{u^2} + xg''_{uv} + g'_v + yg''_{uv} + xyg''_{v^2}.$$

c. Fie $u(x) = x$, $v(x, y) = xy$, $w(x, y, z) = xyz$.

Avem

$$f'_x = g'_u u'_x + g'_v v'_x + g'_w w'_x = g'_u + yg'_v + yzg'_w,$$

$$f'_y = g'_v v'_y + g'_w w'_y = xg'_v + xzg'_w,$$

$$f'_z = g'_w w'_z = xyg'_w$$

$$f''_{x^2} = (g'_u + yg'_v + yzg'_w)'_x = g''_{u^2} + g''_{uv} y + g''_{uw} yz + yg''_{vu} + y^2 g''_{v^2} +$$
$$+ y^2 zg''_{vw} + yzg''_{wu} + y^2 zg''_{wv} + y^2 z^2 g''_{w^2}$$

ş.a.m.d.

10. *Să se arate că funcţia* $f(x, y) = e^y g\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$ *verifică ecuaţia*

$$(x^2 - y^2) f'_x + xyf'_y = xyf .$$

Rezolvare:

Avem

$$f'_x = ye^y g'(u) e^{\frac{x^2}{2y^2}} \cdot \frac{x}{y^2} = \frac{x}{y} e^{y + \frac{x^2}{2y^2}} g'(u),$$

$$f'_y = e^y g(u) + e^y g'(u)\left[e^{\frac{x^2}{2y^2}} + ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\left(-\frac{x^2}{y^3}\right)\right] =$$

$$= e^y g(u) - \frac{x^2}{y^2} e^{y + \frac{x^2}{2y^2}} g'(u) + e^{y + \frac{x^2}{2y^2}} g'(u),$$

Scanned with CamScanner

de unde

$$(x^2-y^2)f_x' + xyf_y' = \frac{x^3}{y}e^{y+\frac{x^2}{2y^2}}g'(u) - xye^{y+\frac{x^2}{2y^2}}g'(u) +$$

$$+ xye^y g(u) - \frac{x^3}{y}e^{y+\frac{x^2}{2y^2}}g'(u) + xye^{y+\frac{x^2}{2y^2}}g'(u) = xye^y g(u) = xyf .$$

11. *Să se arate că funcția* $z = z(x,y)$ *definită implicit prin relația* $F(x-az, y-az) = 0$, *F diferențiabilă, verifică ecuația* $az_x' + bz_y' = 1$.

Rezolvare:

Fie $x-az = u, y-az = v$. Prin derivare în raport cu fiecare variabilă avem:

$$\begin{cases} F_u'(x-az)_x' + F_v'(y-bz)_x' = 0 \\ F_u'(x-az)_y' + F_v'(y-bz)_y' = 0 \end{cases},$$

adică

$$\begin{cases} F_u'(1-az_x') + F_v'(1-bz_x') = 0 \\ F_u'(1-az_y') + F_v'(1-bz_y') = 0 \end{cases}$$

de unde $z_x' = \frac{F_u'}{aF_u' + bF_v'}, z_y' = \frac{F_v'}{aF_u' + bF_v'}$, care evident verifică $az_x' + bz_y' = 1$.

12. *Să se arate că funcția* $f(x,y) = x\sqrt{y} + y\sqrt{x} + \sqrt{x^3+y^3}$ *este omogenă și să se verifice relația din teorema lui Euler.*

Rezolvare:

Avem

$$f(tx,ty) = tx\sqrt{ty} + ty\sqrt{tx} + \sqrt{t^3x^3 + t^3y^3} =$$

$$= t\sqrt{t}(x\sqrt{y} + y\sqrt{x} + \sqrt{x^3+y^3}) = t^{3/2}f(x,y)\forall t > 0$$

deci *f* este omogenă de grad 3/2.

Cum

Scanned with CamScanner

$$f_x' = \sqrt{y} + \frac{y}{2\sqrt{x}} + \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^3}} \quad \text{şi} \quad f_y' = \frac{x}{2\sqrt{y}} + \sqrt{x} + \frac{3y^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}$$

rezultă că

$$xf_x' + yf_y' = x\sqrt{y} + \frac{y\sqrt{x}}{2} + \frac{3x^3}{2\sqrt{x^3+y^3}} + \frac{x\sqrt{y}}{2} + \frac{3y^3}{2\sqrt{x^3+y^3}} + y\sqrt{x} =$$

$$= \frac{3}{2}(x\sqrt{y} + y\sqrt{x} + \sqrt{x^3+y^3}) = \frac{3}{2} f.$$

6.3. Exerciții propuse

1. *Pornind de la definiție, să se calculeze:*

a. $f_x'\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ *şi* $f_y'(1,0)$ *dacă* $f(x,y) = e^{\sin xy}$;

b. $f_{xy}''(1,1)$ *şi* $f_{yx}''(1,1)$ *dacă* $f(x,y) = xy \ln x$;

c. $f_x'(1,2)$ *şi* $f_{x^2}''(1,2)$ *dacă* $f(x,y) = x\sqrt{x^2+y^2}$.

2. *Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul întâi şi doi pentru următoarele funcții:*

a. $f(x,y) = \ln(x+y^2)$;

b. $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy + 3x - 4y$;

c. $f(x,y) = \frac{x}{y} + y^x + y \sin x$;

d. $f(x,y) = \cos\frac{x}{\sqrt{y^2+1}}$;

e. $f(x,y,z) = tg\frac{xy}{\sqrt{z^2+1}}$;

f. $f(x,y,z) = \frac{x}{y}\ln z + \frac{y}{z}\ln x + \frac{z}{x}\ln y$.

Scanned with CamScanner

3. *Pornind de la definiție, să se cerceteze dacă funcțiile următoare sunt diferențiabile în punctele indicate:*

a. $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 2x - 3y$ în $P(2,-1)$;

b. $f(x,y) = \dfrac{x}{y} + x^3y^2$ în $P(1,1)$;

c. $f(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$;

d. $f(x,y,z) = x^3yz^2 - 2yz^3 + 3xz^2$ în $P(0,1,2)$;

e. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

4. *Să se calculeze valoarea aproximativă pentru următoarele numere, înlocuind variația unei funcții cu diferențiala ei:*

a. $\sqrt{1{,}02^3 + 1{,}97^3}$;

b. $1{,}002 \cdot 2{,}003^2 \cdot 3{,}004^3$;

c. $\sin 29^\circ \cdot tg 46^\circ$.

5. *Să se scrie formula lui Taylor de ordinul al doilea pentru funcțiile următoare, în punctele indicate:*

a. $f(x,y) = e^{x+y}$ în (1,-1);

b. $f(x,y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$ în (-2,1);

c. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - yz - 4x - 3y - z + 4$ în (1,1,1);

d. $f(x,y,z) = xy + yz^2 + zx^3$ în (-1,0,1).

6. *Folosind formula lui Taylor de ordinul al doilea, să se calculeze valoarea aproximativă pentru:*

Scanned with CamScanner

a. $\sqrt{1{,}03}\cdot\sqrt[3]{0{,}98}$;

b. $1{,}02\cdot 2{,}01^2\cdot 3{,}03^3$.

7. *Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul întâi şi doi, ale următoarelor funcţii compuse*:

a. $f(x,y)=g\left(\frac{x}{y},x-y\right)$;

b. $f(x,y,z)=g(x\sin y+y\ln z+z^x)$;

c. $f(x,y)=g(x^2-y^2,e^{xy})$;

d. $f(x,y,z)=g(xy,x^2+y^2-z^2)$.

8. *Să se arate că următoarele funcţii verifică ecuaţiile indicate*:

a. $f(x,y,z)=x^n g\left(\frac{y}{x^\alpha},\frac{z}{x^\beta}\right),\ xf_x^{'}+\alpha yf_y^{'}+\beta zf_z^{'}=nf$;

b. $f(x,y,z)=\frac{xy}{z}\ln x+xg\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right),\ xf_x^{'}+yf_y^{'}+zf_z^{'}=f+\frac{xy}{z}$;

c. $f(x,y)=g(xy)+\sqrt{xy}\,h\left(\frac{y}{x}\right),\ x^2f_{x^2}^{''}-y^2f_{y^2}^{''}=0$;

d. $f(x,y)=\frac{x}{y}\left[g(y)+h\left(\frac{y}{x}\right)\right],\ x^2f_{x^2}^{''}+xyf_{xy}^{''}-yf_y^{'}=0$.

9. *Să se arate că funcţiile* $z=z(x,y)$ *definite implicit prin relaţiile de mai jos, verifică ecuaţiile indicate*:

a. $F\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z}\right)=0,\ xz_x^{'}+yz_y^{'}=z$;

b. $F\left(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x}\right)=0,\ xz_x^{'}+yz_y^{'}=z-xy$.

Scanned with CamScanner

10. *Să se arate că funcțiile următoare sunt omogene și verifică relația din teorema lui Euler:*

a. $f(x,y)=x\sqrt{y+z}+y\sqrt{x+z}+z\sqrt{3x+2y}$;

b. $f(x,y,z)=\dfrac{x}{yz}+\dfrac{y}{xz}+\dfrac{z}{xy}+\dfrac{x+y+z}{\sqrt{x^4+2y^4+3z^4}}$;

c. $f(x,y,z)=\dfrac{x}{y^2+z^2}+\dfrac{2y}{z^2+3x^2}+\dfrac{3z}{x^2+5y^2}$.

6.4. Indicații și răspunsuri

1. **a.** $f_x'\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)=0,\quad f_y'(1,0)=0;$

b. $f_{xy}''(1,1)=f_{yx}''(1,1)=1;$

c. $f_x'(1,2)=\sqrt{5}+\dfrac{1}{\sqrt{5}},\quad f_{x^2}''(1,2)=\dfrac{14}{5\sqrt{5}}$.

2. **a.** $f_x'=\dfrac{1}{x+y^2},\quad f_y'=\dfrac{2y}{x+y^2},$

$f_{x^2}''=-\dfrac{1}{(x+y^2)^2},\quad f_{xy}''=f_{yx}''=-\dfrac{2y}{(x+y^2)^2},\quad f_{y^2}''=\dfrac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2};$

b. $f_x'=2x-3y+3,\quad f_y'=2y-2x-4,$

$f_{x^2}''=2,\quad f_{xy}''=f_{yx}''=-2,\quad f_{y^2}''=2;$

c. $f_x'=\dfrac{1}{y}+y^x\ln y+y\cos x,\quad f_y'=-\dfrac{x}{y^2}+xy^{x-1}+\sin x,$

$f_{x^2}''=y^x\ln^2 y-y\sin x,\quad f_{xy}''=f_{yx}''=-\dfrac{1}{y^2}+xy^{x-1}\ln y+y^{x-1}+\cos x,$

Scanned with CamScanner

$$f''_{y^2} = \frac{2x}{y^3} + x(x-1)y^{x-2};$$

d. $f'_x = -\frac{1}{\sqrt{y^2+1}} \sin \frac{x}{\sqrt{y^2+1}}, \quad f'_y = \frac{xy}{(y^2+1)^{3/2}} \sin \frac{x}{\sqrt{y^2+1}},$

$$f''_{x^2} = -\frac{1}{y^2+1} \cos \frac{x}{\sqrt{y^2+1}},$$

$$f''_{xy} = \frac{y}{(y^2+1)^{3/2}} \sin \frac{x}{\sqrt{y^2+1}} + \frac{xy}{(y^2+1)^2} \cos \frac{x}{\sqrt{y^2+1}},$$

$$f''_{y^2} = \frac{x(1-2y^2)}{(y^2+1)^{5/2}} \sin \frac{x}{\sqrt{y^2+1}} - \frac{x^2y^2}{(y^2+1)^3} \cos \frac{x}{\sqrt{y^2+1}};$$

e. $f'_x = \frac{y}{\sqrt{z^2+1}} \left(1 + \mathrm{tg}^2 \frac{xy}{\sqrt{z^2+1}}\right), \quad f'_y = \frac{x}{\sqrt{z^2+1}} \left(1 + \mathrm{tg}^2 \frac{xy}{\sqrt{z^2+1}}\right),$

$$f''_{x^2} = \frac{2y^2}{z^2+1} \mathrm{tg} \frac{xy}{\sqrt{z^2+1}} \left(1 + \mathrm{tg}^2 \frac{xy}{\sqrt{z^2+1}}\right),$$

$$f''_{xy} = \frac{1}{\sqrt{z^2+1}} \left(1 + \mathrm{tg}^2 \frac{xy}{\sqrt{z^2+1}}\right) \cdot \left(\frac{2xy}{\sqrt{z^2+1}} \mathrm{tg} \frac{xy}{\sqrt{z^2+1}} + 1\right),$$

$$f''_{xz} = \frac{-yz}{(z^2+1)^{3/2}} \left(1 + \mathrm{tg}^2 \frac{xy}{\sqrt{z^2+1}}\right) \cdot \left(1 + \frac{2xy}{\sqrt{z^2+1}} \mathrm{tg} \frac{xy}{\sqrt{z^2+1}}\right),$$

$$f''_{yz} = \frac{-xz}{(z^2+1)^{3/2}} \left(1 + \mathrm{tg}^2 \frac{xy}{\sqrt{z^2+1}}\right) \cdot \left(1 + \frac{2xy}{\sqrt{z^2+1}} \mathrm{tg} \frac{xy}{\sqrt{z^2+1}}\right),$$

$$f''_{y^2} = \frac{2x^2}{z^2+1} \mathrm{tg} \frac{xy}{\sqrt{z^2+1}} \left(1 + \mathrm{tg}^2 \frac{xy}{\sqrt{z^2+1}}\right),$$

$$f''_{z^2} = \frac{xy}{(z^2+1)^{3/2}} \left(1 + \mathrm{tg}^2 \frac{xy}{\sqrt{z^2+1}}\right) \left[\frac{2z^2-1}{z^2+1} + \frac{2xyz^2}{(z^2+1)^{3/2}} \mathrm{tg} \frac{xy}{\sqrt{z^2+1}}\right].$$

Scanned with CamScanner

f. $f_x' = \frac{\ln z}{y} + \frac{y}{xz} - \frac{z \ln y}{x^2}$, $f_y' = -\frac{x \ln z}{y^2} - \frac{\ln x}{z} + \frac{z}{xy}$,

$f_z' = \frac{x}{yz} - \frac{y \ln x}{z^3} + \frac{\ln y}{x}$,

$f_{x^2}'' = -\frac{x}{x^2 z} + \frac{2z \ln y}{x^3}$,

$f_{xy}'' = -\frac{\ln z}{y^2} + \frac{1}{xz} - \frac{z}{yx^2}$, $f_{xz}'' = \frac{1}{yz} - \frac{y}{xz^2} - \frac{\ln y}{x^2}$,

$f_{yz}'' = -\frac{x}{y^2 z} + \frac{\ln x}{z^2} + \frac{1}{xy}$,

$f_{y^2}'' = \frac{2x \ln z}{y^3} - \frac{z}{xy^2}$, $f_{z^2}'' = -\frac{x}{yz^2} + \frac{2y \ln x}{z^3}$.

3. **a.** $df(2,-1) = 1dx - 3dy$;

b. $df(1,1) = 4dx + dy$;

c. $\Delta f(0,0;h,k) = \frac{e^{-\frac{1}{h^2+k^2}}}{\sqrt{h^2+k^2}} \sqrt{h^2+k^2}$.

Dacă $t = \sqrt{h^2+k^2}$, $l = \lim\limits_{t \downarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{t^2}}}{t} = 0$, deci $df(0,0) = 0$;

d. $df(0,1,2) = 12dx - 16dy - 24dz$;

e. f nu este continuă în (0,0), deci nici diferențiabilă în (0,0).

4. **a.** $f(x,y) = \sqrt{x^3+y^3}$, $a = 1$, $b = 2$, $h = 0{,}02$, $k = -0{,}03$,

$\Delta f(a,b;h,k) \approx df(a,b)(h,k) = \frac{3a^2}{2\sqrt{a^3+b^3}} h + \frac{3b^2}{2\sqrt{a^3+b^3}} k = -0{,}05$,

$f(1{,}02;1{,}97) \approx 2{,}95$;

Scanned with CamScanner

b. $f(x,y,z)=xy^2z^3$, $a=1, b=2, c=3, h=0{,}002, k=0{,}003, l=0{,}004,$

$f(1{,}002;2{,}003;3{,}004)\approx 108{,}972;$

c. $f(x,y)=\sin x\cdot \mathrm{tg}y$, $a=30^\circ$, $b=45^\circ$, $h=-k=-1^\circ$,

$f(29^\circ,46^\circ)\approx 0{,}5024.$

5. **a.** $$e^{x+y}=1+\frac{1}{1!}\big[(x-1)+(y+1)\big]+\frac{1}{2!}\big[(x-1)^2+2(x-1)(y+1)+(y+1)^2\big]+$$
$$+\frac{1}{3!}e^{\xi+\eta}[(x-1)^3+3(x-1)^2(y+1)+3(x-1)(y+1)^2+(y+1)^3]=$$
$$=1+x+y+\frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{1}{6}e^{\xi+\eta}(x+y)^3;$$

b. $$f(x,y)=1+\frac{1}{2!}[-2(x+2)^2+4(x+2)(y-1)+6(y-1)^2];$$

c. $$f(x,y,z)=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+$$
$$+2(x-1)(y-1)-(y-1)(z-1);$$

d. $$f(x,y,z)=-1+3(x+1)-(z-1)-6(x+1)^2+(x+1)y+$$
$$+3(x+1)(z-1)++2y(z-1)+R_2.$$

6. **a.** $f(x,y,z)=\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{y}$, $\sqrt{1{,}03}\cdot\sqrt[3]{0{,}98}\approx 1{,}0081;$

b. $f(x,y,z)=xy^2z^3$, $1{,}02\cdot 2{,}01^2\cdot 3{,}03^3\approx 114{,}6159$.

7. **a.** $f_x^{'}=\dfrac{1}{y}g_u^{'}+g_v^{'}$, $f_y^{'}=-\dfrac{x}{y^2}g_u^{'}-g_v^{'}$,

$$f_{x^2}^{''}=\frac{1}{y^2}g_{u^2}^{''}+\frac{1}{y}g_{vu}^{''}+g_{v^2}^{''},$$

$$f_{y^2}^{''}=\frac{x^2}{y^4}g_{u^2}^{''}+\frac{x}{y^2}g_{uv}^{''}+\frac{2x}{y^3}g_u^{'}+\frac{x}{y^2}g_{vu}^{''}+g_{v^2}^{''},$$

$$f_{xy}^{''}=-\frac{1}{y^2}g_u^{'}-\frac{x}{y^3}g_{u^2}^{''}-\frac{1}{y}g_{uv}^{''}-\frac{x}{y^2}g_{vu}^{''}-g_{v^2}^{''};$$

Scanned with CamScanner

b. $f'_x = g'(u)(\sin y + z^x \ln z), f'_y = g'(u)(x\cos y + \ln z),$

$$f'_z = g'(u)\left(\frac{y}{z} + xz^{x-1}\right),$$

$$f''_{x^2} = g'(u)z^x \ln^2 z + g''(u)(\sin y + z^x \ln z)^2,$$

$$f''_{y^2} = g'(u)(-x\sin y) + g''(u)(x\cos y + \ln z)^2,$$

$$f''_{z^2} = g'(u)\left(-\frac{y}{z^2} + x(x-1)z^{x-2}\right) + g''(u)\left(\frac{y}{z} + xz^{x-1}\right)^2,$$

$$f''_{xy} = g'(u)\cos y + g''(u)(\sin y + z^x \ln z)(x\cos y + \ln z),$$

$$f''_{yz} = g'(u)\frac{1}{z} + g''(u)(x\cos y + \ln z)\left(\frac{y}{z} + xz^{x-1}\right)$$

$$f''_{xz} = g'(u)(xz^{z-1}\ln z + z^{x-1}) + g''(u)(\sin y + z^x \ln z)\left(\frac{y}{z} + xz^{x-1}\right);$$

c. $f'_x = 2xg'_u + ye^{xy}g'_v, f'_y = -2yg'_u + xe^{xy}g'_v,$

$$f''_{xy} = -4xyg''_{u^2} + 2x^2e^{xy}g''_{uv} + e^{xy}g'_v + xye^{xy}g'_v - 2y^2e^{xy}g''_{vu} + xye^{2xy}g''_{v^2};$$

d. $f'_x = yg'_u + 2xg'_v, f'_y = xg'_u + 2yg'_v, f'_z = -2zg'_v,$

$$f''_{xz} = -2yzg''_{uv} - 4xzg''_{v^2}, f''_{z^2} = -2g'_v + 4z^2g''_{v^2}.$$

8. **a.** $f'_x = nx^{n-1}g(u,v) - ax^{n-\alpha-1}yg'_u - \beta x^{n-\beta-1}z,$

$$f'_y = x^{n-\alpha}g'_u, f'_z = x^{n-\beta}g'_v;$$

b. $f'_x = \frac{y}{z}(\ln z + 1) + g - \frac{y}{x}g'_u - \frac{z}{x}g'_v, f'_y = \frac{x\ln x}{z} + g'_u,$

$$f'_z = -\frac{xy}{z}\ln x + g'_v;$$

c. $f''_{x^2} = y^2g'' - \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}h - \frac{1}{2}x^{-\frac{5}{2}}y^{\frac{3}{2}}h' + \frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}y^{\frac{3}{2}}h' + x^{-\frac{7}{2}}y^{\frac{5}{2}}h'';$

Scanned with CamScanner

$$f''_{y^2} = x^2 g'' - \frac{1}{4} x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{3}{2}} h + \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} h' + \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} h' + x^{-\frac{3}{2}} y^{\frac{1}{2}} h'';$$

d. $f''_{x^2} = \frac{y}{x^3} h''$,

$$f''_{xy} = -\frac{1}{y^2} g + \frac{1}{y} g' - \frac{1}{y^2} h + \frac{1}{xy} h' - \frac{1}{x^2} h'',$$

$$f'_y = -\frac{x}{y^2} g - \frac{x}{y^2} h + \frac{x}{y} g' + \frac{1}{y} h'.$$

9. **a.** $z'_x = \frac{zF'_u}{xF'_u + yF'_v}$, $z'_y = \frac{zF'_v}{xF'_u + yF'_v}$;

b. $z'_x = \frac{zyF'_v - x^2 yF'_u}{x^2 F'_u + xyF'_v}$, $z'_y = \frac{xzF'_u - xy^2 F'_v}{xyF'_u + y^2 F'_v}$.

10. **a.** *f* omogenă de grad 3/2;

b. *f* omogenă de grad -1;

c. *f* omogenă de grad -1.

Scanned with CamScanner

7. EXTREME. EXTREME CU LEGĂTURI

7.1. Considerații teoretice

A. EXTREME LIBERE

Definiția 1. Fie $f(x,y)$ o funcție reală de două variabile reale, $f : X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Un punct (a,b) se numește ***punct de maxim local*** (respectiv ***minim local***) al funcției f, dacă există o vecinătate V a lui (a,b) astfel încât pentru orice $(x,y) \in V \subset X$ să avem $f(x,y) \leq f(a,b)$ (respectiv $f(x,y) \geq f(a,b)$).

Teorema 1. *Dacă $f(x,y)$ are derivate parțiale într-un punct de extrem local (a,b) (maxim sau minim), interior mulțimii X, atunci derivatele parțiale se anulează în acest punct, adică*

$$f_x^{'}(a,b) = 0,\ f_y^{'}(a,b) = 0\ .$$

Definiția 2. Un punct interior $(x,y) \in X$ se numește ***punct staționar*** al funcției f, dacă f este diferențiabilă în (a,b) și diferențiala sa este 0 în acest punct: $df(a,b)=0$.

Teorema 2. *Punctele de extrem local din interiorul lui X în care $f(x,y)$ este diferențiabilă sunt puncte staționare ale funcției.*

Definiția 3. Punctele staționare ale funcției f care nu sunt puncte de extrem se numesc ***puncte șa***.

Teorema 3. *Dacă (a,b) este un punct staționar al lui f și dacă f are derivate parțiale de ordinul doi continue într-o vecinătate V a lui (a,b), atunci:*

Scanned with CamScanner

1. *dacă* $f''_{x^2}(a,b) \cdot f''_{y^2}(a,b) - (f''_{xy}(a,b))^2 > 0$, *atunci* (a,b) *este punct de minim pentru* $f''_{x^2}(a,b) > 0$ *şi de maxim pentru* $f''_{x^2}(a,b) < 0$;
2. *dacă* $f''_{x^2}(a,b) \cdot f''_{y^2}(a,b) - (f''_{xy}(a,b))^2 < 0$, *atunci* (a,b) *este punct şa.*

Teorema 4. *Fie funcţia* $f(x_1, x_2, ..., x_n), f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. *Dacă punctul* $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in X$ *este punct staţionar al lui f şi f are derivate parţiale de ordinul doi continue într-o vecinătate V a lui a, atunci punctul staţionar a este:*

1. *punct de maxim local dacă* $d^2 f(a) < 0, \forall x \in V \cap X$;
2. *punct de minim local dacă* $d^2 f(a) > 0, \forall x \in V \cap X$;
3. *punct şa dacă* $d^2f(a)$ *nu are semn constant.*

Teorema 5. *Dacă* $f : X \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *are derivate parţiale de ordinul doi continue într-o vecinătate V a punctului staţionar a şi*

$$\Delta_0 = 1, \quad \Delta_1 = |f''_{x^2}(a)|,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} f''_{x^2}(a) & f''_{xy}(a) \\ f''_{yx}(a) & f''_{y^2}(a) \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} f''_{x^2}(a) & f''_{xy}(a) & f''_{xz}(a) \\ f''_{yx}(a) & f''_{y^2}(a) & f''_{yz}(a) \\ f''_{zx}(a) & f''_{zy}(a) & f''_{z^2}(a) \end{vmatrix}$$

atunci:

1. *a este punct de minim local dacă* $\Delta_i > 0, \forall i = \overline{0,3}$;
2. *a este punct de maxim local dacă* $\Delta_i \cdot \Delta_{i+1} < 0, \forall i = \overline{0,2}$.

B. EXTREME CU LEGĂTURI

Definiţia 1. Fie $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ o funcţie de n variabile reale, $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $F_1(x), F_2(x), ..., F_m(x), m < n$ funcţii definite tot pe X cu valori reale. Fie $A = \{x \in X | F_i(x) = 0, 1 \le i \le m\}$. Spunem că f

Scanned with CamScanner

admite în punctul $a \in A$ un ***extrem condiționat*** dacă restricția funcției f la mulțimea A are în punctul a un extrem obișnuit.

Teorema 1. *Presupunem că $f(x)$ și $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_m(x)$ au derivate parțiale continue într-o vecinătate V a punctului $a \in A$ și că matricea funcțională $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)$ are în punctul a rangul m. Dacă a este un punct de extrem al lui f condiționat de $a \in A$, atunci există m numere $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ astfel încât:*

$$(*)\begin{cases} f'_{x_1}(a) + \lambda_1 F'_{1x_1}(a) + \lambda_2 F'_{2x_1}(a) + \ldots + \lambda_m F'_{mx_1}(a) = 0 \\ f'_{x_2}(a) + \lambda_1 F'_{1x_2}(a) + \lambda_2 F'_{2x_2}(a) + \ldots + \lambda_m F'_{mx_2}(a) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f'_{x_n}(a) + \lambda_1 F'_{1x_n}(a) + \lambda_2 F'_{2x_n}(a) + \ldots + \lambda_m F'_{mx_n}(a) = 0 \end{cases}$$

Definiția 2. Orice punct $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in F_i$ pentru care matricea funcțională $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)$ are rangul m și verifică (*) pentru anumite valori ale parametrilor $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ se numește ***punct staționar*** al funcției f condiționat de $F_i(x) = 0, 1 \le i \le m$. Coeficienții $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ se numesc ***multiplicatorii lui Lagrange***.

Metoda multiplicatorilor lui Lagrange

Pasul 1. Se construiește funcția lui Lagrange:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F_i(x).$$

Pasul 2. Se formează și se rezolvă sistemul de $(n+m)$ ecuații cu $(n+m)$ necunoscute:

$$\begin{cases} L'_{x_j} = 0, 1 \le j \le n \\ L'_{\lambda_i} = 0, 1 \le i \le m \end{cases}.$$

Scanned with CamScanner

Pasul 3. Calculăm diferențiala de ordinul doi d^2L în punctele a ale sistemului de la pasul 2.

Pasul 4. Scriem diferențialele de ordinul întâi ale condițiilor $F_i(x) = 0, 1 \le i \le m$ şi deducem sistemul

$$\sum_{j=1}^{n} F'_{ix_j}(a)dx_j = 0, 1 \le i \le m.$$

Pasul 5. Rezolvăm sistemul de la pasul 4, obținând m diferențiale dx_i în funcție de celelalte (n-m) diferențiale dx_i şi le înlocuim în expresia lui $d^2L(a)$.

Pasul 6. Studiem semnul funcționalei pătratice $d^2L(a)$ şi decidem:

1. Dacă $d^2L(a)>0$ atunci a este minim condiționat.
2. Dacă $d^2L(a)<0$ atunci a este maxim condiționat.
3. Dacă $d^2L(a)$ nu are semn constant atunci a nu este extrem.

7.2. Exerciții rezolvate

1. *Să se determine punctele de extrem local ale funcțiilor următoare:*

a. $f(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + x^2 - 2x + 3$;

b. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 12x - 3y$;

c. $f(x,y) = xy^2e^{x-y}$;

d. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 4z$;

e. $f(x,y,z) = x^3 - 3x^2 + y^2 + z^2 + yz - 10y - 8z$;

f. $f(x,y,z) = x(1+y)^z$.

Rezolvări:

a. Avem $f'_x = \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2} + 2x - 2$ şi $f'_y = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x}$, de unde punctele staționare sunt soluțiile sistemului

Scanned with CamScanner

$$\begin{cases}\frac{1}{y}-\frac{y}{x^2}+2x-2=0\\ -\frac{x}{y^2}+\frac{1}{x}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{y}-\frac{y}{x^2}+2x-2=0\\ x^2=y^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-2=0\\ x=y\end{cases}$$

sau

$$\begin{cases}2x-2=0\\ x=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$$

sau

$$\begin{cases}x=1\\ y=-1\end{cases}$$ adică $A(1,1)$ şi $B(1,-1)$.

Avem de asemenea $f''_{x^2}=\frac{2y}{x^3}+2$, $f''_{xy}=f''_{yx}=-\frac{1}{y^2}-\frac{1}{x^2}$, $f''_{y^2}=\frac{2x}{y^3}$.

Deci pentru punctul $A(1,1)$, $a=f''_{x^2}(A)=4, b=f''_{xy}(A)=-2, c=f''_{y^2}(A)=2$, de unde $ac-b^2=4>0$ ne spune că A este punct de minim local (a>0) şi $f(A)$=4. Pentru punctul $B(1,-1)$, $a=f''_{x^2}(B)=0, b=f''_{xy}(B)=-2, f''_{y^2}(B)=-2$ deci $ac-b^2=-4<0$ ne spune că B este punct şa.

b. Punctele staționare sunt soluțiile sistemului $\begin{cases}f'_x=0\\ f'_y=0\end{cases}$ adică

$$\begin{cases}3x^2-12=0\\ 3y^2-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm 2\\ y=\pm 1\end{cases}.$$

Obținem patru puncte staționare $A(2,1)$, $B(2,-1)$, $C(-2,1)$, $D(-2,-1)$. Derivatele parțiale de ordinul doi sunt $f''_{x^2}=6x, f''_{xy}=f''_{yx}=0, f''_{y^2}=6y$, deci avem pentru punctul $A(2,1)$, a=12, b=0, c=6, pentru $B(2,-1)$, a=12, b=0, c=-6, pentru $C(-2,1)$, a=-12, b=0, c=6, pentru $D(-2,-1)$, a=-12, b=0, c=-6. Atunci expresia ac-b^2 va avea valorile 72 pentru A şi D, -72 pentru B şi C. Rezultă că A este punct de minim local (a>0), D este punct de maxim local (a<0), iar B şi C sunt puncte şa.

c. Rezolvăm sistemul $\begin{cases}f'_x=0\\ f'_y=0\end{cases}$. Avem

Scanned with CamScanner

$$\begin{cases} y^2e^{x-y} + xy^2e^{x-y} = 0 \\ 2xye^{x-y} - xy^2e^{x-y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)y^2 = 0 \\ xy(2-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \in R \\ y = 0 \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Obținem punctele staționare $A(-1,2)$ şi $B(\alpha,0)$. Derivatele de ordinul doi sunt

$$f''_{x^2} = y^2(x+2)e^{x-y}, \quad f''_{y^2} = x(y^2 - 4y + 2)e^{x-y},$$

$$f''_{xy} = f''_{yx} = y(x+1)(2-y)e^{x-y}.$$

Pentru $A(-1,2)$ avem $a=4e^{-3}$, $b=0$, $c=2e^{-3}$, iar pentru $B(\alpha,0)$, $a=0$, $b=0$, $c=2\alpha e^{\alpha}$. Rezultă că $ac-b^2<0$ pentru A şi $ac-b^2=0$ pentru B. Astfel putem spune că A este punct de minim local, dar nu putem spune nimic despre B.

d. Punctele staționare sunt soluțiile sistemului

$$\begin{cases} f'_x = 2x + 2 = 0 \\ f'_y = 2y - 6 = 0 \\ f'_z = 2z + 4 = 0 \end{cases}, \text{ adică } A(-1,3,-2).$$

Derivatele parțiale de ordinul doi sunt

$$f''_{x^2} = 2, f''_{y^2} = 2, f''_{z^2} = 2, f''_{xy} = f''_{yx} = f''_{xz} = f''_{zx} = f''_{yz} = f''_{zy} = 0.$$

Pentru punctul A avem

$$\Delta_0=1,\ \Delta_1 = |f''_{x^2}(a)| = 2,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} f''_{x^2}(a) & f''_{xy}(a) \\ f''_{yz}(a) & f''_{y^2}(a) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} f''_{x^2}(a) & f''_{xy}(a) & f''_{xz}(a) \\ f''_{yx}(a) & f''_{y^2}(a) & f''_{yz}(a) \\ f''_{zx}(a) & f''_{xy}(a) & f''_{x^2}(a) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8,$$

deci fiind toți pozitivi A este punct de minim local.

e. Determinăm punctele staționare:

Scanned with CamScanner

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \\ f'_z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x = 0 \\ 2y + z - 10 = 0 \\ 2z + y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2) = 0 \\ z = 10 - 2y \\ y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -4 \\ z = 18 \end{cases} \text{sau} \begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \\ z = 18 \end{cases}.$$

Avem $A(0,-4,18)$ şi $B(2,-4,18)$. Derivatele de ordinul doi sunt

$$f''_{x^2} = 6x - 6, \quad f''_{y^2} = 2, \quad f''_{z^2} = 2, \quad f''_{xy} = f''_{yx} = 0,$$
$$f''_{xz} = f''_{zx} = 0, \quad f''_{yz} = f''_{zy} = 1.$$

Obţinem pentru punctul A

$$\Delta_0 = 1,\ \Delta_1 = |f''_{x^2}(a)| = -6,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -12,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -18,$$

iar pentru punctul B

$$\Delta_0 = 1,\ \Delta_1 = |f''_{x^2}(a)| = 6,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 12,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 18.$$

Prin urmare B este punct de minim local, iar A este punct şa.

f. Avem $f'_x = (1+y)^z > 0$, deci nu avem puncte staţionare.

2. *Dacă există, să se determine punctele de extrem condiţionate pentru:*

a. $f(x,y) = x + 2y$ *cu* $x^2 + y^2 = 5$;

b. $f(x,y,z) = xyz$ *cu* $xy+yz+zx=3$;

c. $f(x,y,z) = xy + xz + yz$ *cu* $x + 2y + 3z = 6, x + y + z = 3$.

Rezolvări:

a. Aplicăm metoda multiplicatorilor lui Lagrange.

Pasul 1. Funcţia lui Lagrange este

$$L(x,y,\lambda) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5).$$

Scanned with CamScanner

Pasul 2. Rezolvăm sistemul: $\begin{cases} L_x' = 0 \\ L_y' = 0 \\ L_\lambda' = 0 \end{cases}$. Avem

$$\begin{cases} 1+2x\lambda = 0 \\ 2+2y\lambda = 0 \\ x^2+y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2\lambda} \\ y = -\frac{1}{\lambda} \\ \frac{1}{4\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} \\ x = -1 \\ y = -2 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{2} \\ x = 1 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Pasul 3. $L''_{x^2} = 2\lambda,\ L''_{y^2} = 2\lambda,\ L''_{xy} = L''_{yx} = 0$ şi ca urmare

$$d^2L(A) = dx^2 + dy^2,\ d^2L(B) = -dx^2 - dy^2.$$

Pasul 4. Diferenţiala condiţiei este:

$$dF(A) = -2dx - 4dy = 0,\ \ dF(B) = 2dx - 4dy = 0.$$

Pasul 5. Deducem că $dx = -2dy$.

Pasul 6. $d^2L(A) = 4dy^2 + dy^2 = 5dy^2 > 0$,

$d^2L(B) = -4dy^2 - dy^2 = -5dy^2 < 0$,

deci $A(-1,-2)$ este minim local condiţionat, iar $B(1,2)$ este maxim local condiţionat.

b.

Pasul 1. Funcţia lui Lagrange este

$$L(x,y,z;\lambda) = xyz + \lambda(xy + yz + zx - 3).$$

Pasul 2. Rezolvăm sistemul: $\begin{cases} L_x' = 0 \\ L_y' = 0 \\ L_z' = 0 \\ L_\lambda' = 0 \end{cases}$. Avem

Scanned with CamScanner

$$\begin{cases} yz+\lambda y+\lambda z=0 \\ xz+\lambda x+\lambda z=0 \\ xy+\lambda x+\lambda y=0 \\ xy+yz+zx=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-x)(z+\lambda)=0 \\ (y-z)(x+\lambda)=0 \\ xz+\lambda x+\lambda y=0 \\ xy+yz+zx=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \\ \lambda=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \\ z=-1 \\ \lambda=-\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Deci soluțiile sunt $A\left(1,1,1;-\dfrac{1}{2}\right)$ și $B\left(-1,-1,-1;\dfrac{1}{2}\right)$

Pasul 3. $L''_{x^2}=L''_{y^2}=L''_{z^2}=0, \quad L''_{xy}=L''_{yx}=z+\lambda,$

$L''_{xz}=L''_{zx}=y+\lambda, \quad L''_{yz}=L''_{zy}=x+\lambda$

şi ca urmare

$$d^2L(A)=dxdy+dydz+dzdx,$$

$$d^2L(B)=-dxdy-dydz-dzdx.$$

Pasul 4. Diferențiala legăturii este:

$$dF=F'_x dx+F'_y dy+F'_z dz= \\ =(y+z)dx+(x+z)dy+(x+y)dz=0,$$

deci

$$dF(A)=2dx+2dy+2dz=0,$$
$$dF(B)=-2dx-2dy-2dz=0.$$

Pasul 5. Deducem că $dz=-dx-dy$.

Pasul 6. $d^2L(A)=dxdy+(dx+dy)(-dx-dy)=$
$$=-dx^2-dy^2-dxdy<0$$

iar

$$d^2L(B)=-dxdy-(dx+dy)(-dx-dy)=$$
$$=dx^2+dy^2+dxdy>0,$$

prin urmare $A(1,1,1)$ este punct de maxim condiționat, iar $B(-1,-1,-1)$ este punct de minim condiționat.

Scanned with CamScanner

c.

Pasul 1. Funcția lui Lagrange este

$$L(x,y,z;\lambda,\mu)=xy+yz+zx+\lambda(x+2y+3z-6)+$$
$$+\mu(x+y+z-3).$$

Pasul 2. Soluțiile sistemului $L'_x=0,\ L'_y=0,\ L'_z=0,\ L'_\lambda=0,\ L'_\mu=0$ sunt date de

$$\begin{cases}y+z+\lambda+\mu=0\\x+z+2\lambda+\mu=0\\x+y+3\lambda+\mu=0\\x+2y+3z=6\\x+y+z=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y-x=\lambda\\z-y=\lambda\\y+z+\lambda+\mu=0\\x+2y+3z=6\\x+y+z=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y-\lambda\\z=y+\lambda\\\mu=-2y-2\lambda\\6y+2\lambda=6\\3y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\\z=1\\\lambda=0\\\mu=-2\end{cases},$$

adică $A(1,1,1;0,-2)$.

Pasul 3. $L''_{x^2}=L''_{y^2}=L''_{z^2}=0,\ L''_{xy}=L''_{yx}=L''_{xz}=L''_{zx}=L''_{yz}=L''_{zy}=1$

și ca urmare $d^2L(A)=2(dxdy+dxdz+dydz)$.

Pasul 4. Diferențialele condițiilor sunt:

$$dx+2dy+3dz=0,\ dx+dy+dz=0.$$

Pasul 5. Deducem că $dy=-2dx,\ dz=dx$.

Pasul 6. $d^2L(A)=2(-2dx^2+dx^2-2dx^2)=-6dx^2<0$, prin urmare $A(1,1,1)$ este punct de maxim condiționat.

7.3. Exerciții propuse

1. *Să se determine punctele de extrem local ale următoarelor funcții:*

a. $f(x,y)=x^4+y^4-4xy,\ x,y\in\mathbb{R}$;

b. $f(x,y)=y^4-8y^3+18y^2-8y+x^3-3x^2-3x,\ x,y\in\mathbb{R}$;

c. $f(x,y)=xy+\dfrac{50}{x}+\dfrac{20}{y},\ x,y>0$;

d. $f(x,y)=x^3+y^3-3xy,\ x,y\in\mathbb{R}$;

Scanned with CamScanner

e. $f(x,y)=3xy^2-x^3-15x-36y+9,\ x,y\in\mathbb{R}$;

f. $f(x,y)=\sin x\sin y\sin(x+y),\ x,y\in(0,2\pi)$;

g. $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z,\ x,y,z\in\mathbb{R}$;

h. $f(x,y,z)=x+\dfrac{y^2}{4x}+\dfrac{z^2}{y}+\dfrac{2}{z},\ x,y,z>0$;

i. $f(x,y,z)=xy^2z^3(7-x-2y-3z),\ x,y,z\neq 0$;

j. $f(x,y,z)=(x+z^2)e^{x(y^2+z^2+1)},\ x,y,z\in\mathbb{R}$.

2. *Dacă există, determinați punctele de extrem condiționate pentru următoarele funcții:*

a. $f(x,y)=x^2+y^2+xy\ \ cu\ \ 2x+y=3$;

b. $f(x,y)=xy\ \ cu\ \ x^2+y^2=10$;

c. $f(x,y,z)=x-2y+2z\ \ cu\ \ x^2+y^2+z^2=9$;

d. $f(x,y,z)=xyz\ \ cu\ \ x+2y+3z=6,\ x,y,z>0$;

e. $f(x,y,z)=x+y+z\ \ cu\ \ x-y+z=2,\ x^2+y^2+z^2=4$;

f. $f(x,y,z)=xyz\ \ cu\ \ x+y+z=5,\ xy+yz+zx=8$.

7.4. Indicații şi răspunsuri

1. **a.** $A(0,0)$ punct şa, $B(1,1)$, $C(-1,-1)$ puncte de minim;

b. $A(1+\sqrt{2},2+\sqrt{3})$, $B(1+\sqrt{2},2-\sqrt{3})$ puncte de minim, $C(1-\sqrt{2},2)$ punct de maxim, $D(1+\sqrt{2},2)$, $E(1-\sqrt{2},2+\sqrt{3})$, $F(1-\sqrt{2},2-\sqrt{3})$ puncte şa;

c. $A(5,2)$ punct de minim;

d. $A(0,0)$ punct şa, $B(1,1)$ punct de minim;

e. $A(2,3)$, $B(-2,-3)$ puncte şa;

Scanned with CamScanner

f. $A\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$ punct de maxim, $B(\pi,\pi)$ incert;

g. $A(-1,-2,3)$ punct de minim;

h. $A\left(\frac{1}{2},1,1\right)$ punct de minim;

i. $A(1,1,1)$ punct de maxim;

j. $A(-1,0,0)$ punct de minim.

2. **a.** $A\left(\frac{3}{2},0\right)$ minim condiționat;

b. $A(\sqrt{5},-\sqrt{5})$, $B(-\sqrt{5},\sqrt{5})$ minime condiționate, $C(\sqrt{5},\sqrt{5})$, $D(-\sqrt{5},-\sqrt{5})$ maxime condiționate;

c. $A(1,-2,2)$ maxim condiționat, $B(-1,2,-2)$ minim condiționat;

d. $A(1,1,1)$ maxim condiționat;

e. $A\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$ maxim condiționat, $B(0,-2,0)$ minim condiționat;

f. $A\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{7}{3}\right)$, $B\left(\frac{4}{3},\frac{7}{3},\frac{4}{3}\right)$, $C\left(\frac{7}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$ maxime condiționate, $D(2,2,1)$, $E(2,1,2)$, $F(1,2,2)$ minime condiționate.

Scanned with CamScanner

8. INTEGRALE MULTIPLE. INTEGRALA DUBLĂ

8.1. Considerații teoretice

Definiția 1. Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu compact (mulțime închisă și mărginită) și $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție mărginită. Spunem că șirul finit de submulțimi compacte ale lui D, (D_k), $1 \leq k \leq n$, constituie o ***diviziune*** a domeniului D, dacă D_j și D_k nu au puncte interioare comune pentru orice $1 \leq j \neq k \leq n$ și $D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_n$.
Notăm cu $\Delta : D_1, D_2, \ldots, D_n$.

Definiția 2. Numărul $d_k = \sup_{P,Q \in D_k} d(P,Q), 1 \leq k \leq n$, se numește ***diametrul*** mulțimii D_k.

Definiția 3. Numărul $\|\Delta\| = \max_{1 \leq k \leq n} \{d_k\}$ se numește ***normă*** a diviziunii Δ.

Definiția 4. Numim ***sumă Riemann*** a funcției f corespunzătoare diviziunii D și punctelor intermediare $P_i \in D_i, 1 \leq i \leq n$ suma

$$\sigma_\Delta(f, P) = \sum_{i=1}^{n} f(P_i) A(D_i)$$

unde $A(D_i)$ este aria mulțimii D_i.

Definiția 5. Spunem că funcția $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este ***integrabilă*** dacă există un număr real I cu proprietatea că oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru orice diviziune Δ cu $\|\Delta\| < \delta(\varepsilon)$ să avem $|\sigma_\Delta(f, P) - I| < \varepsilon$ pentru orice alegere a punctelor intermediare $P_i \in D_i$.

Numărul I se numește ***integrală dublă*** a funcției f pe D și se notează cu

Scanned with CamScanner

$$I = \iint_D f(x, y)dxdy .$$

Teorema 1. *Condiția necesară și suficientă pentru ca f să fie integrabilă pe $D \subset \mathbb{R}^2$ este ca oricare ar fi șirul de diviziuni (Δ_n), $n \in \mathbb{N}$, cu $\|\Delta_n\| \to 0$, șirul sumelor Riemann $\sigma_{\Delta_n}(f, P^n)$ să fie convergent către I oricare ar fi punctele intermediare P^n.*

Definiția 6. Numim ***sumă inferioară*** și ***sumă superioară Darboux*** expresiile

$$s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i A(D_i) \text{ și } S_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i A(D_i)$$

unde $m_i = \inf\limits_{P \in D_i} f(x, y)$, $M_i = \sup\limits_{P \in D_i} f(x, y)$.

Teorema 2. *Condiția necesară și suficientă pentru ca f să fie integrabilă pe $D \subset \mathbb{R}^2$ (compact) este ca pentru orice $\varepsilon > 0$ să existe $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru orice diviziune Δ cu $\|\Delta\| < \delta(\varepsilon)$, să avem $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$.*

Proprietăți ale integralei duble

1. Dacă *f* este continuă pe *D*, atunci *f* este integrabilă pe *D*.
2. Dacă $f(x, y) = 1 \forall (x, y) \in D$ atunci aria domeniului *D* este

$$A(D) = \iint_D dxdy .$$

3. Dacă *f, g* sunt integrabile pe *D* și $a, b \in R$, atunci *af+bg* este integrabilă pe *D* și avem

$$\iint_D (af + bg)dxdy = a\iint_D fdxdy + b\iint_D gdxdy .$$

4. Dacă $D = D_1 \cup D_2$, iar D_1 și D_2 nu au puncte interioare comune, iar *f* este integrabilă pe *D*, atunci *f* este integrabilă pe D_i și

$$\iint_D fdxdy = \iint_{D_2} fdxdy + \iint_{D_2} fdxdy .$$

Scanned with CamScanner

5. Dacă $m \le f(x,y) \le M, \forall (x,y) \in D$, atunci

$$mA(D) \le \iint_D f(x,y)dxdy \le MA(D).$$

6. Dacă f este continuă pe D există $(\varepsilon, \eta) \in D$ astfel ca

$$\iint_D f(x,y)dxdy = f(\varepsilon,\eta)A(D).$$

7. Dacă $f(x,y) \ge 0, \forall (x,y) \in D$, atunci

$$\iint_D f(x,y)dxdy \ge 0.$$

8. Dacă $f(x,y) \ge g(x,y), \forall (x,y) \in D$, atunci

$$\iint_D f(x,y)dxdy \ge \iint_D g(x,y)dxdy.$$

9. Dacă f este integrabilă pe D, atunci şi $|f|$ este integrabilă pe D şi

$$\left|\iint_D f(x,y)dxdy\right| \le \iint_D |f(x,y)|dxdy.$$

Teorema 3. *Fie $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $D=[a,b]\times[c,d]$. Dacă f este mărginită şi integrabilă pe D, pentru orice $x \in [a,b]$ există integrala $F(x) = \int_c^d f(x,y)dxdy$ şi F(x) este integrabilă pe [a,b] atunci:*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx.$$

Definiţia 7. Spunem că domeniul D este ***simplu în raport cu axa*** *Oy* dacă poate fi scris sub forma

$$D = \{(x,y) \in R^2 | a \le x \le b, g(x) \le y \le h(x)\}$$

unde $g,h:[a,b] \to \mathbb{R}$, continue pe $[a,b]$, $g(x) \le h(x)$, $\forall x \in [a,b]$.

Scanned with CamScanner

Teorema 4. *Fie funcția $f(x,y)$, $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ integrabilă pe D, D simplu în raport cu axa Oy și pentru orice $x \in [a,b]$ există $F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy$, iar F(x) este integrabilă pe [a,b]. Atunci*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy \right] dx.$$

Definiția 8. Spunem că funcția $T: D' \subset \mathbb{R}^2 \to D \subset \mathbb{R}^2$, D, D' domenii compacte, dată de $T: \begin{cases} x = g(u,v) \\ y = h(u,v) \end{cases}, (u,v) \in D'$ este o ***transformare regulată*** a lui D' în D dacă g, h au derivate parțiale continue și jacobianul $\begin{vmatrix} g_u' & g_v' \\ h_u' & h_v' \end{vmatrix} \neq 0$ în orice punct interior al lui D'.

Teorema 5. *Dacă $D' \subset \mathbb{R}^2$ este un domeniu compact mărginit de o curbă închisă și netedă, iar $T: \begin{cases} x = g(u,v) \\ y = h(u,v) \end{cases}$ este o transformare regulată a lui D' în D, unde g, h au derivate parțiale mixte de ordinul doi pe D', $T(D') = D$ și f este continuă pe D, atunci*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(g(u,v),h(u,v)) \left| \frac{D(g,h)}{D(u,v)} \right| dudv,$$

unde $\frac{D(g,h)}{D(u,v)}$ este jocabianul transformării.

8.2. Exerciții rezolvate

1. *Să se calculeze următoarele integrale duble:*

   a. $\iint_D \ln(x+y)dxdy, (D) 0 \le x \le 1, 1 \le y \le 2$;

   b. $\iint_D xydxdy, (D) x^2 \le y \le 2x+3$;

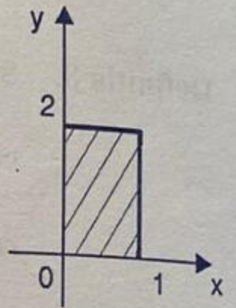
Scanned with CamScanner

c. $\iint_D dxdy, (D) x \le 2y+1, x \le 1-y, y \le 2x+1$;

d. $\iint_D ydxdy, (D) x^2+y^2 \le 4, x^2+\frac{1}{4}y^2 \ge 1, x \ge 0$;

e. $\iint_D ydxdy, (D) -y^2 \le x \le y^2, x^2+y \le 2, y \le 0$.

Rezolvări:



a. Domeniul este un dreptunghi cu laturile paralele cu axele, deci putem desface integrala în două integrale simple, adică

$$I = \int_0^1 \left[\int_1^2 \ln(x+y)dy \right] dx =$$

$$= \int_0^1 \left[(x+y)\ln(x+y) \Big|_1^2 - \int_1^2 dy \right] dx =$$

$$= \int_0^1 [(x+2)\ln(x+2) - (x+1)\ln(x+1) - 1] dx =$$

$$= \left[\frac{(x+2)^2}{2}\ln(x+2) - \frac{(x+1)^2}{2}\ln(x+1) - x \right] \Bigg|_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{x+2}{2} - \frac{x+1}{2} \right) =$$

$$= \frac{9\ln 3}{2} - 2\ln 2 - 1 - 2\ln 2 - \frac{1}{2} = \frac{9\ln 3}{2} - 4\ln 2 - \frac{3}{2}.$$

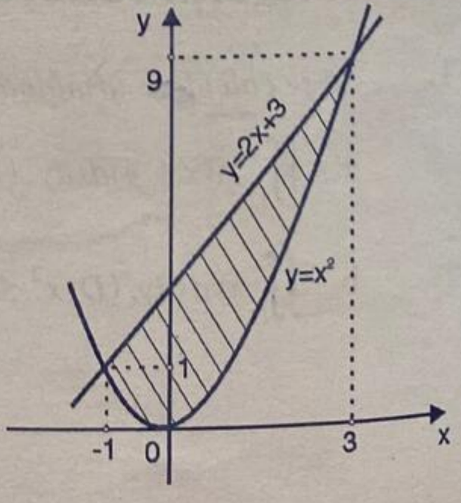
b. Domeniul este simplu în raport cu axa *Oy*, iar intersecția celor două curbe este dată de

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x^2 = 2x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} x = 3 \\ y = 9 \end{cases}.$$

Avem

$$I = \int_{-1}^3 \left(\int_{x^2}^{2x+3} xydy \right) dx = \int_{-1}^3 \frac{xy^2}{2} \Big|_{x^2}^{2x+3} dx =$$

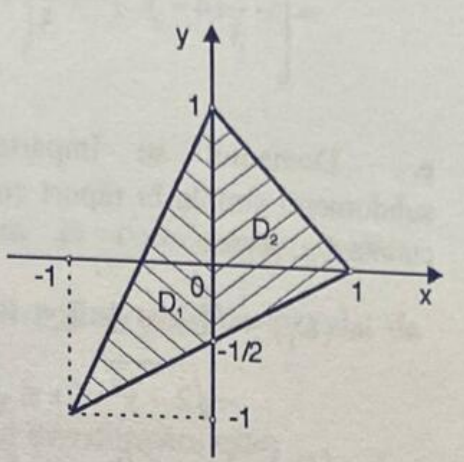
$$= \int_{-1}^3 \left(-\frac{x^5}{2} + 2x^3 + 6x^2 + \frac{9x}{2} \right) dx =$$



Scanned with CamScanner

$$=\left(-\frac{x^6}{12}+\frac{x^4}{2}+2x^3+\frac{9x^2}{4}\right)\Big|_{-1}^{3}=\frac{160}{3}.$$

c. Domeniul de împarte în două subdomenii simple în raport cu axa Oy:



$$(D_1)\ -1\le x\le 0,\ \frac{x-1}{2}\le y\le 2x+1,$$

$$(D_2)\ 0\le x\le 1,\ \frac{x-1}{2}\le y\le 1-x.$$

Avem

$$I_1=\int_{-1}^{0}\left(\int_{\frac{x-1}{2}}^{2x+1}dy\right)dx=\int_{-1}^{0}\left(2x+1-\frac{x-1}{2}\right)dx=$$

$$=\int_{-1}^{0}\frac{3x+3}{2}dx=\frac{3}{4}(x+1)^2\Big|_{-1}^{0}=\frac{3}{4},$$

$$I_2=\int_{0}^{1}\left(\int_{\frac{x-1}{2}}^{1-x}dy\right)dx=\int_{0}^{1}\left(1-x-\frac{x-1}{2}\right)dx=$$

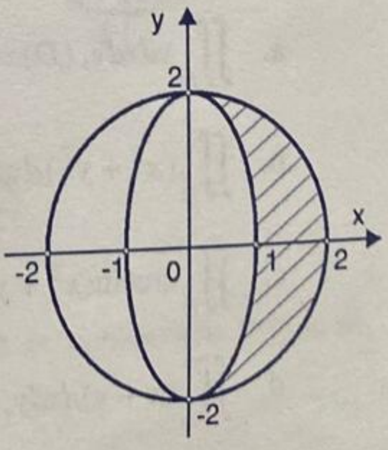
$$=\int_{0}^{1}\frac{3-3x}{2}dx=-\frac{3}{4}(1-x)^2\Big|_{0}^{1}=\frac{3}{4}.$$

Deci $I=I_1+I_2=\dfrac{3}{2}$.

d. Domeniul are forma unei semilune şi este simplu în raport cu axa Oy.

$$(D)\ -2\le y\le 2,\ \sqrt{1-\frac{y^2}{4}}\le x\le\sqrt{4-y^2}.$$

Avem

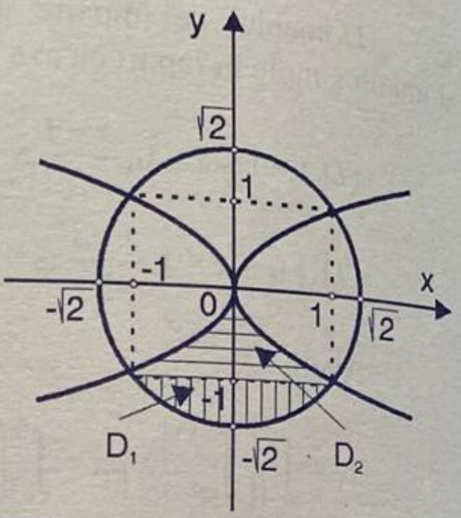


$$I=\int_{-2}^{2}\left(\int_{\sqrt{1-y^2/4}}^{\sqrt{4-y^2}}y\,dx\right)dy=$$

$$=\int_{-2}^{2}\left(y\sqrt{4-y^2}-y\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}\right)dy=$$

Scanned with CamScanner

$$= \left[-\frac{1}{3}(4-y^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{3}\left(1-\frac{y^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \right]\Bigg|_{-2}^{2} = 0 .$$



e. Domeniul se împarte în două subdomenii simple în raport cu axa Oy sau cu axa Ox. Avem

$$(D_1) - \sqrt{2} \le y \le -1,$$

$$-\sqrt{2-y^2} \le x \le \sqrt{2-y^2} ,$$

$$(D_2) -1 \le y \le 0 ,\ -y^2 \le x \le y^2 .$$

Deci

$$I_1 = \int_{-\sqrt{2}}^{-1} \left(\int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} y dx \right) dy = \int_{-\sqrt{2}}^{1} 2y\sqrt{2-y^2}\, dy =$$

$$= -\frac{2}{3}(2-y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-\sqrt{2}}^{-1} = -\frac{2}{3},$$

$$I_2 = \int_{-1}^{0} \left(\int_{-y^2}^{y^2} y dx \right) dx = \int_{-1}^{0} 2y^3 dy = \frac{y^4}{2}\Bigg|_{-1}^{0} = -\frac{1}{2},$$

prin urmare $I = I_1 + I_2 = -\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{7}{6}$.

2. *Folosind schimbări de variabile adecvate, să se calculeze următoarele integrale duble:*

a. $\iint_D y dx dy, (D) x^2 + y^2 \le 1$;

b. $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy, (D) 1 \le x^2 + y^2 \le 4$;

c. $\iint_D \arcsin(x^2 + y^2) dx dy, (D) x^2 + y^2 \le 1, y \ge x$;

d. $\iint_D (x + y) dx dy, (D) x^2 + y^2 \le 2y$;

Scanned with CamScanner

e. $\iint_D xdx, (D)(x-1)^2+(y-1)^2 \le 1$;

f. $\iint_D dxdy, (D) 1 \le x+y \le 13, x \le y \le 5x$.

Rezolvări:

a. Domeniul este discul unitate. Trecem la coordonatele polare: $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$. Prin această transformare domeniul noilor variabile este dat de $(D')\begin{cases} 0\le\rho\le 1 \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}$, adică un dreptunghi. Jacobianul transformării este:

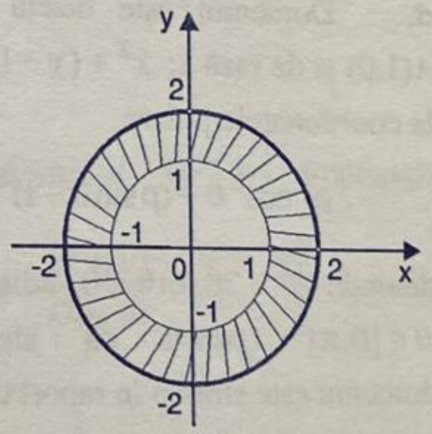
$$\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)}=\begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\theta \\ y'_\rho & y'_\theta \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix}=\rho\cos^2\theta+\rho\sin^2\theta=\rho.$$

Rezultă că

$$I=\iint_{D'}\rho\sin\theta\cdot\rho d\rho d\theta=\int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\rho^2\sin\theta d\theta\right)d\rho=\int_0^1(-\rho^2\cos\theta)\Big|_0^{2\pi}d\rho=0.$$

b. Domeniul este o coroană circulară. Trecând la coordonate polare vom obține dreptunghiul

$$(D')\begin{cases} 1\le\rho\le 2 \\ 0\le\rho\le 2\pi \end{cases}.$$



Prin urmare

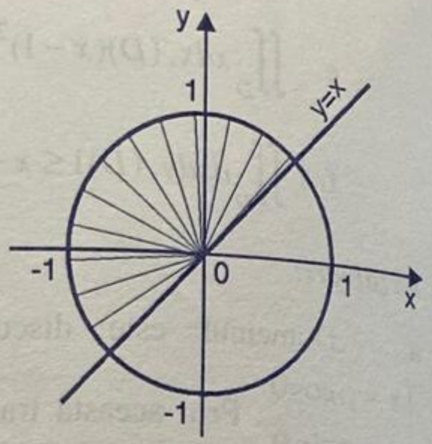
$$I=\iint_{D'}\rho^2\cdot\rho\cdot d\rho d\theta=$$

$$=\int_1^2\left(\int_0^{2\pi}\rho^3 d\theta\right)d\rho=2\pi\int_1^2\rho^3 d\rho=\frac{\pi\rho^4}{2}\Big|_1^2=\frac{15\pi}{2}.$$

c. Domeniul este un semidisc care prin trecere la coordonate polare se transformă într-un dreptunghi:

Scanned with CamScanner

$$(D')\begin{cases} 0 \le \rho \le 1 \\ \dfrac{\pi}{4} \le \theta \le \dfrac{5\pi}{4} \end{cases}.$$



Avem

$$I = \iint_{D'} \arcsin \rho^2 \cdot \rho d\rho d\theta =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \arcsin \rho^2 \cdot \rho d\theta \right) d\rho =$$

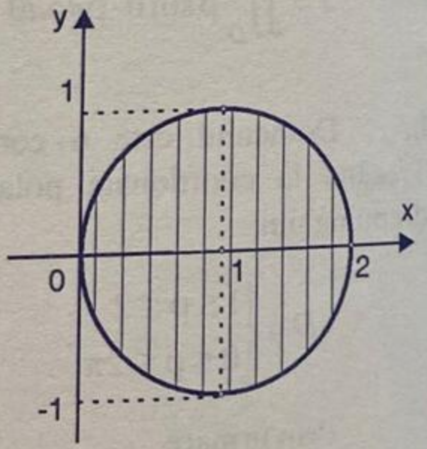
$$= \pi \int_0^1 \arcsin \rho^2 \cdot \rho d\rho =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \arcsin t dt =$$

$$= \frac{\pi}{2} t \arcsin t \Big|_0^1 - \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \sqrt{1-t^2} \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2 - 2\pi}{4}.$$

d. Domeniul este discul cu centrul în $A(1,0)$ şi de rază 1: $x^2 + (y-1)^2 \le 1$. Trecând la coordonatele polare



$$\rho^2 \cos^2 \theta + (\rho \sin \theta - 1)^2 \le 1,$$

de unde $\rho^2 - 2\rho \sin \theta \le 0$, adică $\rho \le 2 \sin \theta$ şi $\theta \in [0, \pi]$ (pentru ca $\sin \theta \ge 0$). Noul domeniu este simplu în raport cu axa $O\theta$, deci

$$I = \iint_{D'} (\rho \cos \theta + \rho \sin \theta) \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\sin\theta} \rho^2 (\cos \theta + \sin \theta) d\rho \right) d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi} (\cos \theta + \sin \theta) \cdot \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^{2\sin\theta} d\theta = \frac{8}{3} \int_0^{2\pi} (\sin^3 \theta \cos \theta + \sin^4 \theta) d\theta =$$

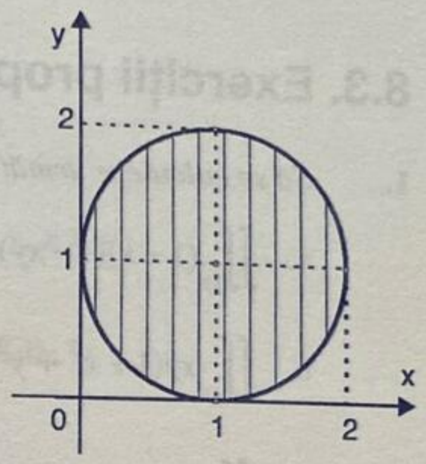
$$= \frac{8}{3} \cdot \frac{\sin^4 \theta}{4} \Big|_0^{\pi} + \frac{8}{3} \int_0^{\pi} (\sin^2 \theta)^2 d\theta = \frac{8}{3} \int_0^{\pi} \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right)^2 d\theta =$$

$$= \frac{2}{3} \int_0^{\pi} (1 - 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta) d\theta =$$

Scanned with CamScanner

$$= \frac{2\pi}{3} - \frac{2}{3}\sin 2\theta \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{3}\int_0^{\pi}(1+\cos 4\theta)d\theta = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{1}{12}\sin 4\theta\Big|_0^{\pi} = \pi .$$

e. Domeniul este discul cu centrul în $A(1,1)$ şi de rază 1. Trecând la coordonatele polare obţinem $(\rho\cos\theta - 1)^2 + (\rho\sin\theta - 1)^2 \le 1$, ceea ce conduce la calcule laborioase. Notând $x-1=\rho\cos\theta$, $y-1=\rho\sin\theta$, obţinem acelaşi jacobian $\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \rho$ şi noul domeniu este dreptunghiul



$$(D')\begin{cases} 0 \le \rho \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}.$$

Avem astfel

$$I = \iint_{D'} (1+\rho\cos\theta)\cdot\rho d\rho d\theta = \int_0^1\left[\int_0^{2\pi}(\rho+\rho^2\cos\theta)d\theta\right]d\rho =$$

$$= \int_0^1 (2\pi\rho + \rho^2 \sin\theta\Big|_0^{2\pi})d\rho = \pi\rho^2\Big|_0^1 = \pi.$$

f. Notăm $u = x + y$ şi $v = \frac{y}{x}$. Noul domeniu va fi dreptunghi $(D')\begin{cases} 1 \le u \le 13 \\ 1 \le v \le 5 \end{cases}$. Jacobianul transformării este $\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u' & x_v' \\ y_u' & y_v' \end{vmatrix}$. Întrucât $x = \frac{u}{v+1}$ şi $y = \frac{uv}{v+1}$, obţinem

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{v+1} & -\frac{u}{(v+1)^2} \\ \frac{v}{v+1} & \frac{u}{(v+1)^2} \end{vmatrix} = \frac{u}{(v+1)^3} + \frac{uv}{(v+1)^3} = \frac{u}{(v+1)^2},$$

deci

$$I = \iint_{D'} \frac{u}{(v+1)^2}dudv = \int_1^{13}\left[\int_1^5 \frac{u}{(v+1)^2}dv\right]du = \int_1^{13}\left(-\frac{u}{v+1}\right)\Big|_1^5 du =$$

$$=\int_1^{13}\left(\frac{u}{2}-\frac{u}{6}\right)du=\int_1^{13}\frac{u}{3}du=\frac{u^2}{6}\Big|_1^{13}=28.$$

8.3. Exerciții propuse

1. *Să se calculeze următoarele integrale duble:*

a. $\iint_D (1-x)(1-xy)dxdy,\ (D)\ 0\le x\le 1, 0\le y\le 1;$

b. $\iint_D xy(1+x^2+y^2)^{-3/2}dxdy,\ (D)\ 0\le x\le 1, 0\le y\le 1;$

c. $\iint_D dxdy,\ (D)\ \sin^2 x\le y\le \sin x,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right];$

d. $\iint_D xdxdy,\ (D)\ 1\le y\le 4-x^2;$

e. $\iint_D \sqrt{x}dxdy,\ (D)\ y^2\le 4x, 4y\ge x^2;$

f. $\iint_D 2xy^2dxdy,\ (D)\ x^2+y^2\le R^2, x\ge 0;$

g. $\iint_D \frac{x^2}{y^2}dxdy,\ (D)\ 1\le x\le 2, \frac{1}{x}\le y\le x;$

h. $\iint_D \sqrt{4x^2-y^2}dxdy,\ (D)\ y\le x, y\ge 0, x\le 1;$

i. $\iint_D x^3ydxdy,\ (D)\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\ge 1, x^2+y^2\le 9, y\ge 0;$

j. $\iint_D xdxdy,\ (D)\ 1\le xy\le 2,\ 1\le\frac{y}{x}\le 2,\ x>0;$

k. $\iint_D \arcsin\sqrt{x+y}dxdy,\ (D)\ -1\le y\le 1, 0\le x+y\le 1.$

2. *Folosind schimbări de variabile adecvate, să se calculeze următoarele integrale duble:*

Scanned with CamScanner

a. $\iint_D (x^2 + y^2)dxdy, (D)\ x^2 + y^2 \le 4$;

b. $\iint_D xdxdy, (D)\ 1 \le x^2 + y^2 \le 4$;

c. $\iint_D e^{x^2+y^2} dxdy, (D)\ x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0$;

d. $\iint_D (x + y)dxdy, (D)\ x^2 + y^2 \le 1, -x \le y, x \le y$;

e. $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy, (D)\ x^2 + y^2 \le 1, xy \le 0$;

f. $\iint_D x^2 dxdy, (D)\ x^2 + y^2 \le 2x$;

g. $\iint_D \frac{y^2}{x^2} dxdy, (D)\ 1 \le x^2 + y^2 \le 2x$;

h. $\iint_D ydxdy, (D)\ (x-1)^2 + (y-1)^2 \le 1$;

i. $\iint_D (x + y)dxdy, (D)\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1, a, b > 0$;

j. $\iint_D (x + y)dxdy, (D)\ 1 \le x + y \le 13, x \le y \le 5x$;

k. $\iint_D xdxdy, (D)\ 1 \le xy \le 2, 1 \le \frac{y}{x} \le 2, x > 0$.

8.4. Indicații şi răspunsuri

1. **a.** $I = \frac{5}{12}$;

b. $I = \frac{2\sqrt{2} - 1 - \sqrt{3}}{2}$;

c. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\sin^2 x}^{\sin x} dy \right) dx = 1 - \frac{\pi}{4}$;

Scanned with CamScanner

d. $I=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left(\int_{1}^{4-x^2}xdy\right)dx=0$;

e. $I=\frac{48}{7}$;

f. $I=2\int_0^R\left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}xy^2dy\right)dx=\frac{4}{3}\int_0^R x(R^2-x^2)^{3/2}dx=\frac{4}{15}R^5$

g. $I=\frac{9}{4}$;

h. $I=\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$;

i. $I=0$;

j. $I=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\left(\int_{\frac{1}{x}}^{2x}xdy\right)dx+\int_1^{\sqrt{2}}\left(\int_x^{\frac{2}{x}}xdy\right)dx=\frac{5\sqrt{2}-6}{3}$;

k. $I=\int_{-1}^{1}\left(\int_{-y}^{1-y}\arcsin\sqrt{x+y}dx\right)dy=\int_{-1}^{1}\left(\int_0^1\arcsin\sqrt{t}dt\right)dy=\frac{\pi}{2}$

2. a. 8π;

b. 0;

c. $\frac{e-1}{2}\pi$;

d. $\frac{\sqrt{2}}{3}$;

e. $\frac{\pi}{3}$;

f. $I=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^{2\cos\theta}\rho^2\cdot\rho d\rho\right)d\theta=\frac{3\pi}{2}$;

g. $I=\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\left(\int_1^{2\cos\theta}\rho tg^2\theta d\rho\right)d\theta=\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2}$;

Scanned with CamScanner

h. π;

i. $I=\int_0^1\left[\int_0^{2\pi}(a\rho\cos\theta+b\rho\sin\theta)\cdot ab d\rho d\theta\right]=0$;

j. $\frac{13^3-1}{9}$;

k. $\frac{5\sqrt{2}-6}{3}$.

Scanned with CamScanner

9. ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDINUL ÎNTÂI

9.1. Considerații teoretice

Definiția 1. Se numeşte ***ecuație diferențială de ordinul*** n orice ecuație de forma

$$F(x, y, x', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

în care $y = f(x)$ este o funcție reală necunoscută de o variabilă reală, $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ derivatele de ordinul $1,2,\ldots,n$ ale acesteia, iar F este o funcție cunoscută de $(n+2)$ variabile.

Definiția 2. Se numeşte ***soluție generală*** a ecuației de mai sus o funcție $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ care verifică

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) = 0, \forall x \in D.$$

Definiția 3. Spunem că ecuația diferențială de ordinul n poate fi pusă sub ***forma canonică*** dacă ea poate fi soluționată în raport cu $y^{(n)}$ astfel încât să avem

$$y^{(n)} = g(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}).$$

Definiția 4. Fie $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$ şi $f : D \to \mathbb{R}$. Spunem că f satisface ***condiția lui Lipschitz*** în raport cu y dacă există $L>0$ astfel încât

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

pentru orice $(x, y_1), (x, y_2) \in D$.

Scanned with CamScanner

Teorema de existență și unicitate a ecuațiilor diferențiale de ordinul întâi:

Fie ecuația diferențială de ordinul întâi $y' = g(x,y)$. *Dacă funcția* $g(x,y)$ *este continuă în raport cu ambele variabile pe dreptunghiul* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b\}$, *a,b>0 și satisface condiția lui Lipschitz pe D în raport cu y, atunci există o soluție* $\varphi(x)$ *unică a ecuației* $y' = g(x,y)$, *definită și derivabilă pe o vecinătate a lui* x_0 *și care verifică condiția inițială* $y_0 = \varphi(x_0)$.

Definiția 5. O ecuație de forma $y' = g(x)h(y)$ se numește ***cu variabile separabile***.

Definiția 6. O ecuație diferențială de ordinul întâi $y' = g(x,y)$ se numește ***omogenă*** dacă se poate reduce la forma $y' = g\left(\frac{y}{x}\right), x \neq 0$.

Teorema 2. *O ecuație de ordinul întâi omogenă se reduce la o ecuație cu variabile separabile cu substituția y=tx.*

Definiția 7. O ecuație diferențială de ordinul întâi $y' = g(x,y)$ se numește ***liniară*** în y și y' dacă are forma

$$y' + P(x)y = Q(x).$$

O astfel de ecuație se numește și ***omogenă*** dacă $Q(x)=0$ și ***neomogenă*** dacă Q nu este identic nulă.

Teorema 3. *Soluția generală a ecuației liniare neomogene este*

$$y = ke^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx.$$

Definiția 8. Spunem că ecuația diferențială de ordinul întâi este ***de tip Bernoulli*** dacă are forma

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}$$

unde $\alpha \in \mathbb{R}$ și P și Q sunt funcții continue pe un interval din $\mathbb{R}$.

UNIVERSITATEA DIN BRAȘOV
BIBLIOTECA

Scanned with CamScanner

Teorema 4. *O ecuație diferențială de tip Bernoulli în care $\alpha \neq 0$ și $\alpha \neq 1$ se reduce la o ecuație liniară neomogenă cu substituția* $z = y^{1-\alpha}$.

9.2. Exerciții rezolvate

1. *Să se integreze ecuațiile cu variabile separabile:*

a. $y' = \dfrac{(2x+1)(1+y^2)}{(x^2+x+1)(y+1)}$;

b. $y' = x\,ctg y$;

c. $y' = \dfrac{xy(1+y^2)}{1+x^2}$;

d. $y' = \dfrac{1-y^2}{x\ln x}$;

e. $y' = \dfrac{e^y}{y(x^2+5x+4)}$.

Rezolvări:

a. Separăm variabilele și apoi integrăm:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x+1)(1+y^2)}{(x^2+x+1)(y+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y+1}{1+y^2}dy = \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx \Rightarrow \int \frac{y+1}{1+y^2}dy = \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{2y}{1+y^2}dy + \int \frac{1}{1+y^2}dy = \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln(1+y^2) + \operatorname{arctg} y = \ln(x^2+x+1) + C.$$

Soluția este sub forma implicită.

b. Procedând ca mai sus avem:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x\cos y}{\sin y}\Rightarrow\frac{\sin y}{\cos y}dy=xdx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int\frac{\sin y}{\cos y}dy=\int xdx\Rightarrow-\ln|\cos y|=\frac{x^2}{2}+C\Rightarrow\cos y=ke^{-\frac{x^2}{2}}.$$

c. La fel ca mai sus, obținem:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{xy(1+y^2)}{1+x^2}\Rightarrow\frac{dy}{y(1+y^2)}=\frac{xdx}{1+x^2}\Rightarrow\int\frac{dy}{y(1+y^2)}=\int\frac{xdx}{1+x^2}.$$

Dar

$$\frac{1}{y(1+y^2)}=\frac{A}{y}+\frac{By+C}{1+x^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1=A+Ay^2+By^2+Cy\xrightarrow{\text{egalizarea coef.}}\begin{cases}A+B=0\\C=0\\A=1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=-1.\\C=0\end{cases}$$

Prin urmare

$$\int\frac{dy}{y(1+y^2)}=\int\frac{1}{y}dy-\int\frac{y}{1+y^2}dy=\ln|y|-\frac{1}{2}\ln|1+y^2|=\frac{1}{2}\ln\frac{y^2}{1+y^2}$$

Avem astfel $\frac{1}{2}\ln\frac{y^2}{1+y^2}=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$, adică $\frac{y^2}{1+y^2}=k(1+x^2)$.

d. Avem

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-y^2}{x\ln x}\Rightarrow\frac{dy}{1-y^2}=\frac{dx}{x\ln x}\Rightarrow\int\frac{dy}{1-y^2}=\int\frac{dx}{x\ln x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|=\ln|\ln x|+C$$

$$\Rightarrow\ln\frac{y+1}{y-1}=\ln\ln^2 x+2C\Rightarrow\frac{y+1}{y-1}=k\ln^2 x\Rightarrow y=\frac{1+k\ln^2 x}{-1+k\ln^2 x}.$$

Scanned with CamScanner

Verificarea soluției se poate face derivând funcția obținută:

$$y'=\frac{\left(2k\ln x\cdot\frac{1}{x}\right)(-1+k\ln^2 x)-\left(2k\ln x\cdot\frac{1}{x}\right)(1+k\ln^2 x)}{(-1+k\ln^2 x)^2}=\frac{-\frac{4k}{x}\ln x}{(k\ln^2 x)^2},$$

$$x\ln x\cdot y'=-4k\frac{\ln^2 x}{(k\ln^2 x-1)^2}=1-\frac{4k\ln^2 x+k^2\ln^4 x-2k\ln^2 x+1}{(k\ln^2 x-1)^2}=$$

$$=1-\frac{(k\ln^2 x+1)^2}{(k\ln^2 x-1)^2}=1-y^2.$$

e. $$\frac{dy}{dx}=\frac{e^y}{y(x+1)(x+4)}\Rightarrow\frac{ydy}{e^y}=\frac{dx}{(x+1)(x+4)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int\frac{ydy}{e^y}=\int\frac{dx}{(x+1)(x+4)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int ye^{-y}dy=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow ye^y+\int e^{-y}dy=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{3}\ln|x+4|+C\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -e^{-y}(y+1)=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+1}{x+4}\right|+C.$$

2. *Să se integreze ecuațiile diferențiale omogene:*

a. $y'=\dfrac{x^2+xy-y^2}{x^2}$;

b. $xy'=y+xtg\dfrac{y}{x}$;

c. $y'=\dfrac{2x^3-xy^2}{2y^3-x^2y}$.

Rezolvări:

a. Avem

Scanned with CamScanner

$$y'=\frac{x^2\left[1+\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]}{x^2}\Rightarrow y'=1+\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

Facem substituția $\frac{y}{x}=t$ şi avem

$$y=tx\Rightarrow y'=t'x+t\Rightarrow t'x+t=1+t-t^2.$$

Obținem ecuația cu variabile separabile $t'=\frac{1-t^2}{x}$.

Separăm variabilele şi integrăm:

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1-t^2}{x}\Rightarrow\frac{dt}{1-t^2}=\frac{dx}{x}\Rightarrow\int\frac{dt}{1-t^2}=\int\frac{dx}{x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right|=\ln|x|+C\Rightarrow\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|=\ln x^2+2C\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{t+1}{t-1}=ke^{x^2}\Rightarrow t=\frac{1+ke^{x^2}}{-1+ke^{x^2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=x\cdot\frac{1+ke^{x^2}}{-1+ke^{x^2}}.$$

b. Avem $y'=\frac{y}{x}+\operatorname{tg}\frac{y}{x}\xrightarrow{\text{pentru } t=\frac{y}{x}}y'=t+\operatorname{tg}t$. Cum $y'=t'x+t$ obținem $t'x+t=t+\operatorname{tg}t$, adică

$$t'=\frac{\operatorname{tg}t}{x}\Rightarrow\frac{dt}{dx}=\frac{\operatorname{tg}t}{x}\Rightarrow\frac{dt}{\operatorname{tg}t}=\frac{dx}{x}\Rightarrow\int\frac{dt}{\operatorname{tg}t}=\int\frac{dx}{x}\Rightarrow\ln|\sin t|=\ln|x|+C\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sin t=ke^{x}\Rightarrow\sin\frac{y}{x}=ke^{x}.$$

c. Avem

Scanned with CamScanner

$$y'=\frac{x^3\left(2-\frac{y^2}{x^2}\right)}{x^3\left(2\frac{y^3}{x^3}-\frac{y}{x}\right)}=\frac{2-\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\left(\frac{y}{x}\right)^3-\frac{y}{x}},\quad \frac{y}{x}=t,\quad y=tx,\quad y'=t'x+t\,,$$

deci obținem ecuația cu variabile separabile

$$t'x+t=\frac{2-t^2}{2t^3-t}\Leftrightarrow t'x=\frac{-2t^4+2}{2t^3-t}\Leftrightarrow \frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\cdot\frac{2(1-t^2)(1+t^2)}{t(2t^2-1)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2t^3-t}{(1-t)(1+t)(1+t^2)}dt=2\frac{dx}{x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int\frac{2t^3-t}{(1-t)(1+t)(1+t^2)}dt=2\ln|x|+C$$

Dar

$$\frac{2t^3-t}{(1-t)(1+t)(1+t^2)}=\frac{A}{1-t}+\frac{B}{1+t}+\frac{Ct+D}{1+t^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2t^3-t=A(1+t)(1+t^2)+B(1-t)(1+t^2)+(Ct+D)(1-t^2)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A=\frac{1}{4} & \textit{pentru } t=1\\ B=-\frac{1}{4} & \textit{pentru } t=-1\\ A+B+D=0 & \textit{pentru } t=0\\ 15A-5B-3(2C+D)=14 & \textit{pentru } t=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\frac{1}{4}\\ B=-\frac{1}{4}\\ C=-\frac{3}{2}\\ D=0\end{cases}.$$

Prin urmare

$$\int\frac{2t^3-t}{(1-t)(1+t)(1+^2)}dt=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{1-t}-\frac{1}{4}\int\frac{dt}{1+t}-\frac{3}{2}\int\frac{tdt}{1+t^2}=$$

$$=-\frac{1}{4}\ln|t-1|-\frac{1}{4}\ln|t+1|-\frac{3}{4}\ln|1+t^2|=-\frac{1}{4}\ln|(t^2-1)(1+t^2)^3|,$$

Scanned with CamScanner

deci $-\frac{1}{4}\ln|(t^2-1)(1+t^2)^3|=2\ln|x|+C$, adică $(t^2-1)(1+t^2)^3=\frac{k}{x^8}$. Înlocuind t cu $\frac{y}{x}$ obținem

$$\frac{y^2-x^2}{x^2}\cdot\frac{(y^2+x^2)^3}{x^6}=\frac{k}{x^8}\Rightarrow(y^2-x^2)(y^2+x^2)^3=k\,.$$

Putem verifica soluția derivând în raport cu x:

$$(2yy'-2x)(y^2+x^2)^3+3(y^2-x^2)(y^2+x^2)^2(2yy'+2x)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2yy'(y^2+x^2+3y^2-3x^2)=2x(x^2+y^2-3y^2+3x^2)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y'=\frac{4x(2x^2-y^2)}{4y(2y^2-x^2)}=\frac{2x^3-xy^2}{2y^3-x^2y}.$$

3. *Să se integreze ecuațiile diferențiale liniare*:

a. $(1-x^2)y'+xy-x=0$;

b. $y'+4x^3y=e^{x-x^4}$;

c. $y'+\frac{x}{1+x^2}y=\frac{1}{x(1+x^2)}$.

Rezolvări:

a. Se consideră ecuația liniară și omogenă atașată $(1-x^2)y'+xy=0$ care de fapt este o ecuație cu variabile separabile. Avem

$$y'=\frac{xy}{x^2-1}\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{xy}{x^2-1}\Leftrightarrow\frac{dy}{y}=\frac{xdx}{x^2-1}\xrightarrow{\text{integrare}}\int\frac{dy}{y}=\int\frac{xdx}{x^2-1}$$

adică

$$\ln|y|=\frac{1}{2}|x^2-1|+C,$$

care implică $y=k\sqrt{x^2-1}$. Prin metoda variației constantelor determinăm o soluție particulară a ecuației liniare neomogene. Presupunem că $k=k(x)$ și o determinăm astfel ca $y=k(x)\sqrt{x^2-1}$ să verifice ecuația neomogenă. Avem:

Scanned with CamScanner

$$y' = k'(x)\sqrt{x^2-1} + k(x)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-1}},$$

$$(1-x^2)y' + xy - x = (1-x^2)k'(x)\sqrt{x^2-1} +$$

$$+ (1-x^2)k(x)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + xk(x)\sqrt{x^2-1} - x =$$

$$= (1-x^2)k'(x)\sqrt{x^2-1} - x = 0,$$

$$k'(x) = -\frac{x}{(x^2-1)^{3/2}},\quad k(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},\quad y = 1.$$

Soluția generală este

$$y' = k\sqrt{x^2-1} + 1.$$

b. Ecuația omogenă atașată este $y' = -4x^3 y$, de unde $\frac{dy}{y} = -4x^3 dx$, adică $\ln|y| = -x^4 + C$, ceea ce conduce la $y = ke^{-x^4}$. Căutăm o soluție particulară de forma $y = k(x)e^{-x^4}$. Avem

$$y' = k'(x)e^{-x^4} - 4x^3 k(x)e^{-x^4},$$

$$k'(x)e^{-x^4} - 4x^3 k(x)e^{-x^4} + 4x^3 e^{-x^4} = e^{x-x^4}$$

$$k'(x) = e^x,\quad k(x) = e^x,\quad y = e^{x-x^4}.$$

Soluția generală este $y = ke^{-x^4} + e^{x-x^4}$.

c. Ecuația omogenă atașată este $y' + \frac{x}{1+x^2}y = 0$, deci $\frac{dy}{y} = -\frac{xdx}{1+x^2}$, de unde

$$\ln|y| = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C,$$

adică

$$y = \frac{k}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Scanned with CamScanner

Căutăm o soluție particulară de forma $y=\frac{k(x)}{\sqrt{1+x^2}}$. Avem:

$$y'=\frac{k'(x)\sqrt{1+x^2}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}k(x)}{1+x^2},$$

$$\frac{k'(x)(1+x^2)-xk(x)}{(1+x^2)^{3/2}}+\frac{xk(x)}{(1+x^2)^{3/2}}=\frac{1}{x(1+x^2)},$$

$$k'(x)=\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}},\quad k'(x)=\frac{1}{x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}=-\frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}},$$

$$k(x)=-\ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right).$$

Soluția generală este $y'=\frac{k}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{\ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{\sqrt{1+x^2}}$.

4. *Să se integreze ecuațiile de tip Bernoulli:*

a. $y'+\frac{2}{x}y=\frac{\ln x}{x}y^3$;

b. $y'+2xy=y^5e^{4x^2}$;

c. $y'+ytgx=y^2$.

Rezolvări:

a. Facem substituția $z=y^{1-3}=y^{-2}$. Avem

$$z'=-2y^{-3}y',\quad -\frac{z'}{2y^{-3}}+\frac{2z^{-\frac{1}{2}}}{x}=\frac{\ln x}{x}z^{-\frac{3}{2}},$$

Scanned with CamScanner

$$-\frac{z'z^{-\frac{3}{2}}}{2}+\frac{2z^{-\frac{1}{2}}}{x}=\frac{\ln x}{x}z^{-\frac{3}{2}},\quad z'=\frac{4z}{x}-\frac{2\ln x}{x}.$$

Am obținut o ecuație liniară. Ecuația omogenă atașată este $z'=\frac{4}{x}z$. Soluția acesteia este $z=kx^4$. Căutăm o soluție particulară $z=k(x)x^4$. Avem:

$$z'=k'(x)x^4+4x^3k(x),$$

$$k'(x)+4x^3k(x)=4zx^3k(x)-2\frac{\ln x}{x},$$

$$k'(x)=-\frac{2\ln x}{x^5},$$

$$k(x)=-2\int\frac{\ln x}{x^5}dx=-2\int te^{-5t}\cdot e^t dt=-2\int te^{-4t}dt=\frac{te^{-4t}}{2}-\int\frac{e^{-4t}}{2}dt=$$

$$=\frac{te^{-4t}}{2}+\frac{e^{-4t}}{8}=\frac{4t+1}{8}e^{-4t}=\frac{4\ln x+1}{8}\cdot\frac{1}{x^4},\ z=\frac{4\ln x+1}{8}.$$

Soluția generală este $y^{-2}=kx^4+\frac{4\ln x+1}{8}$.

b. Facem substituția $z=y^{1-5}=y^{-4}$. Avem:

$$z'=-4y^{-5}y',-\frac{z'}{4y^{-5}}+2xz^{-\frac{1}{4}}=y^5e^{4x^2},\ z'=8xz-4e^{4x^2}.$$

Ecuația omogenă atașată este $z'=8xz$ cu soluția $z=ke^{4x^2}$. Căutăm o soluție particulară de forma $z=k(x)e^{4x^2}$. Avem:

$$z'=k'(x)e^{4x^2}+8xk(x)e^{4x^2},$$

$$k'(x)e^{4x^2}+8xk(x)e^{4x^2}=8xk(x)e^{4x^2}-4e^{4x^2},$$

$$k'(x)=-4,\ k(x)=-4x,\ z=-4xe^{4x^2}.$$

Soluția generală este $y^{-4}=ke^{4x^2}-4xe^{4x^2}=(k-4x)e^{4x^2}$.

c. Facem substituția $z=y^{1-2}=y^{-1}$. Avem:

$$z'=-\frac{y'}{y^2},-z'y^2+\frac{tgx}{z}=y^2,\ z'=ztgx-1.$$

Scanned with CamScanner

Soluția ecuației omogene atașate $z' = z\,\mathrm{tg}x$ este $z = \frac{k}{\cos x}$. Căutăm o soluție particulară de forma $z = \frac{k(x)}{\cos x}$. Avem:

$$z' = \frac{k'(z)\cos x - k(x)\sin x}{\cos^2 x}, \frac{k'(x)\cos x + k(x)\sin x}{\cos^2 x} = \frac{k(x)\sin x}{\cos^2 x} - 1,$$

$$k'(x) = -\cos x, \quad k(x) = -\sin x, \quad z = -\mathrm{tg}x.$$

Soluția generală este $y^{-1} = \frac{k}{\cos x} - \mathrm{tg}x$, adică $y = \frac{\cos x}{k - \sin x}$.

9.3. Exerciții propuse

1. *Să se integreze următoarele ecuații cu variabile separabile:*

a. $y' = y^2 e^x$;

b. $y' = e^y \mathrm{arctg}x$;

c. $y' = \frac{3y+1}{5x+3}$;

d. $y' = \frac{1+y^2}{x^3-1}$;

e. $y' = \frac{2+\cos y}{\sqrt{1-x^2}}$;

f. $y' = \frac{e^y+1}{e^y+2}x$.

2. *Să se integreze ecuațiile diferențiale omogene:*

a. $y' = \frac{4x+y}{5x+2y}$;

b. $y' = \frac{x^2+y^2}{x^2}$;

Scanned with CamScanner

c. $y'=\dfrac{-5x^2-3xy+y^2}{x^2}$;

d. $y'=\dfrac{y+\sqrt{x^2-y^2}}{x}$;

e. $y'=\dfrac{y\left(1+\ln\dfrac{y}{x}\right)}{x}$;

f. $y'=\dfrac{y\left(x\cos\dfrac{y}{x}+y\sin\dfrac{y}{x}\right)}{x\left(y\sin\dfrac{y}{x}-x\cos\dfrac{y}{x}\right)}$.

3. *Să se integreze ecuațiile diferențiale liniare*:

a. $y'+\dfrac{y}{x}=5x^3$;

b. $y'+ytgx=\dfrac{1}{\sin x\cos x}$;

c. $(1-x^2)y'+xy-1=0$;

d. $y'+y\cos x=\sin x\cos;$

e. $y'+2xy=2xe^{-x^2}$;

f. $(2x-x^2)y'+(x-1)y=2x-2$.

4. *Să se integreze ecuațiile diferențiale de tip Bernoulli*:

a. $y'-\dfrac{4}{x}y=x\sqrt{y}$;

b. $2x^3y'-3x^2y=y^3$;

c. $y'+\dfrac{2}{x}y+y^2\ln x=0$;

Scanned with CamScanner

d. $xy'-2y=2x^2\sqrt{y}$;

e. $3y^2y'-y^3\cos x=\cos x$;

f. $y'+y\ln x=e^{x\ln x}y^2$.

9.4. Indicații şi răspunsuri

1. **a.** $y=-\frac{1}{e^x+C}$;

b. $e^{-y}=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-x\text{arctg}x+C$;

c. $3y+1=C(5x+3)^{\frac{3}{5}}$;

d. $\text{arctg}y=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)-\frac{\sqrt{3}}{3}\text{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$;

e. $\frac{2\sqrt{3}}{3}\text{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}tg\frac{y}{2}\right)=\arcsin x+C$;

f. $\ln\frac{e^{2y}}{e^y+1}=\frac{x^2}{2}+C$.

2. **a.** $-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y^2}{x^2}+2\frac{y}{x}-2\right|-\frac{\sqrt{3}}{4}\ln\left|\frac{\frac{y}{x}+1-\sqrt{3}}{\frac{y}{x}+1+\sqrt{3}}\right|=\ln|x|+C$;

b. $\frac{2\sqrt{3}}{3}\text{arctg}\frac{2y-x}{x\sqrt{3}}=\ln|x|+C$;

c. $y=\frac{Cx^7+Cx}{1-Cx^6}$;

d. $y=x\sin(\ln C\cdot|x|)$;

Scanned with CamScanner

e. $y = xe^{Cx}$;

f. $xy\cos\dfrac{y}{x} = C$.

3. **a.** $y = x^4 + \dfrac{C}{x}$;

b. $y = 1 + \dfrac{1}{2}\cos x \ln\left|\dfrac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + C\cos x$;

c. $y = x + C\sqrt{x^2 - 1}$;

d. $y = \sin x - 1 + C \cdot e^{-\sin x}$;

e. $y = (x^2 + C)e^{-x^2}$;

f. $y = 2 + C\sqrt{x^2 - 2x}$.

4. **a.** $y = \left(\dfrac{1}{2}x^2 \ln x + Cx^2\right)^2$;

b. $y = \sqrt{\dfrac{x^3}{C - x}}$;

c. $y = \dfrac{1}{Cx^2 - x(\ln x + 1)}$;

d. $y = (x^2 + Cx)^2$;

e. $y = \sqrt[3]{C \cdot e^{\sin x} - 1}$;

f. $y = \dfrac{x^x}{1 + C \cdot e^x}$.

Scanned with CamScanner

PARTEA A DOUA

Algebră liniară

Scanned with CamScanner

10. SPAŢII VECTORIALE. DEPENDENŢĂ LINIARĂ

10.1. Consideraţii teoretice

A. SPAŢII ŞI SUBSPAŢII VECTORIALE

Definiţia 1. Fie K şi V două mulţimi arbitrare nevide. Orice aplicaţie $\psi: K\times V \to V$, $(\alpha,x)\in K\times V \to \psi(\alpha,x)\in V$, se numeşte ***lege de compoziţie externă*** pe V cu elemente din K.

Definiţia 2. Fie K un corp şi $(V,+)$ un grup aditiv abelian. Spunem că V este ***spaţiu vectorial*** peste corpul K dacă legea de compoziţie externă ψ, $\psi: K\times V \to V; (\alpha,v)\xrightarrow{\psi}\alpha\cdot v$ satisface următoarele axiome:

1. $(\alpha+\beta)\cdot v=\alpha\cdot v+\beta\cdot v$;
2. $\alpha\cdot(u+v)=\alpha\cdot u+\alpha\cdot v$;
3. $\alpha\cdot(\beta\cdot v)=(\alpha\beta)\cdot v$;
4. $1\cdot v=v$;

pentru orice u şi $v\in V$ şi orice $\alpha,\beta\in K$.

Elementele lui V se numesc ***vectori***, ale lui K scalari, operaţia internă pe V se numeşte ***adunarea vectorilor***, iar cea externă ***înmulţirea vectorilor cu scalari***.

Definiţia 3. Dacă $K=\mathbb{R}$ spunem că V este ***spaţiu vectorial*** sau ***spaţiu liniar real***.

Definiţia 4. Fie V un spaţiu vectorial peste K ($K=\mathbb{R}$ sau $K=\mathbb{C}$). O submulţime V_1 a lui V se numeşte ***subspaţiu vectorial*** dacă pentru orice $x, y\in V_1$ şi orice $\alpha,\beta\in K$ rezultă

$$\alpha x+\beta y\in V_1.$$

Scanned with CamScanner

Teorema 1. *Dacă V_1 şi V_2 sunt subspaţii vectoriale ale lui V atunci $V_1 \cap V_2$ este subspaţiu vectorial al lui V.*

Definiţia 5. Fie V_1 şi V_2 două subspaţii vectoriale ale lui V. Se numeşte ***sumă a celor două subspaţii*** mulţimea

$$V_1 + V_2 = \{w \in V \mid w = u + v, u \in V_1, v \in V_2\}.$$

Teorema 2. *Suma a două subspaţii vectoriale este un subspaţiu vectorial.*

B. DEPENDENŢĂ ŞI INDEPENDENŢĂ LINIARĂ

Definiţia 1. Fie V un spaţiu vectorial peste $\mathbb{R}$ şi $v_1, v_2, ..., v_n \in V$. Expresia

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k$ se numeşte ***combinaţie liniară*** a vectorilor consideraţi $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R})$.

Definiţia 2. Spunem că vectorii $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ constituie un ***sistem de generatori*** pentru spaţiul vectorial V dacă orice vector $v \in V$ poate fi reprezentat ca o combinaţie liniară a acestora, adică există $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ astfel încât $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$.

Teorema 1. *Mulţimea tuturor combinaţiilor liniare a n vectori formează un subspaţiu vectorial.*

Definiţia 3. Spunem că vectorii $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ sunt ***liniar dependenţi*** sau că formează un ***sistem liniar dep***endent, dacă există scalarii $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$, nu toţi nuli, astfel încât

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0.$$

Definiţia 4. Spunem că vectorii $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ sunt ***liniar independenţi*** sau că formează un ***sistem liniar independent*** dacă relaţia $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0$ are loc numai dacă

$$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0.$$

Scanned with CamScanner

Teorema 2. *Orice mulţime de vectori ai lui V care conţine un sistem de generatori ai lui V formează un sistem de generatori ai lui V.*

Teorema 3. *Orice submulţime nevidă a unui sistem liniar independent constituie un sistem liniar independent.*

Definiţia 5. Spunem că vectorii $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ formează o ***bază*** a spaţiului vectorial V dacă sunt liniar independenţi şi formează un sistem de generatori ai spaţiului.

Teorema 4. *Orice două baze ale unui spaţiu vectorial au acelaşi număr de vectori.*

Definiţia 6. Numărul de vectori ai unei baze a spaţiului vectorial se numeşte ***dimensiunea*** spaţiului vectorial.

Teorema 5. *Scrierea unui vector al spaţiului vectorial într-o bază a acestuia este unică.*

Definiţia 7. Scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ din relaţia de reprezentare a unui vector v în baza $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$ se numesc ***componente*** sau ***coordonate ale vectorului*** dat în baza respectivă.

C. SPAŢIUL EUCLIDIAN REAL $\mathbb{R}^n$

Definiţia 1. Fie V un spaţiu vectorial real. O aplicaţie $\varphi: V \times V \to R$, notată cu $\varphi(x, y) = \langle x, y \rangle$, se numeşte ***produs scalar*** dacă verifică axiomele:

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$ şi $\langle x, x \rangle = 0$ numai dacă $x=0$;
2. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \forall x, y \in V$;
3. $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle, \forall x_1, x_2, y \in V$;
4. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle, \forall x, y \in V, \forall \alpha \in \mathbf{R}$.

Definiţia 2. Un spaţiu vectorial pe care s-a definit un produs scalar se numeşte ***spaţiu euclidian***.

Scanned with CamScanner

Inegalitatea lui Cauchy-Buniakovsky-Schwarz

Într-un spațiu euclidian V avem $\forall x, y \in V$:

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle .$$

Teorema 1. *Dacă* $V=\mathbb{R}^n$, *aplicația* $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$, *unde* $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, *este un produs scalar.*

Definiția 3. Într-un spațiu euclidian real V spunem că vectorii x și $y \in V$ sunt ***ortogonali*** dacă $\langle x, y\rangle = 0$ și scriem $x \perp y$.

Definiția 4. Într-un spațiu euclidian real V spunem că sistemul de vectori $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$ este ***ortogonal*** dacă orice doi vectori distincți ai sistemului sunt ortogonali, adică

$$\langle v_i, v_j\rangle = 0, \forall i, j \in \overline{1,n}, i \neq j .$$

Teorema 2. *Orice sistem ortogonal de vectori care nu conține vectorul nul, este liniar independent.*

Teorema 3. *Orice sistem ortogonal de n vectori nenuli din* $\mathbb{R}^n$ *constituie o bază ortogonală a lui* $\mathbb{R}^n$.

Definiția 4. Fie V un spațiu vectorial real. O aplicație $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$ se numește ***normă*** dacă verifică axiomele:

1. $\|x\| \geq 0, \forall x \in V$ și $\|x\| = 0$ numai dacă $x=0$;
2. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in V$;
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|, \forall x \in V, \alpha \in \mathbb{R}$.

Definiția 5. Un spațiu vectorial pe care s-a definit o normă se numește ***spațiu normat***.

Teorema 4. *Orice spațiu euclidian poate fi normat luând* $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Scanned with CamScanner

Definiția 6. O bază a spațiului euclidian real V se numește ***ortonormată*** dacă este ortogonală și este formată din vectori cu norma egală cu 1.

Teorema 5. *Spațiul euclidian real* $\mathbb{R}^n$ *este normat* $\|x\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}$ *și conține o bază ortonormată:*

$$e_1=(1,0,...,0),\ e_2=(0,1,...,0),...,e_n=(0,0,...,1).$$

10.1. Exerciții rezolvate

1. *Să se arate că mulțimea* $P_2(t)=\{at^2+bt+c \mid a,b,c\in\mathbb{R}\}$ *formează împreună cu operațiile următoare un spațiu vectorial real:*

$$(at^2+bt+c)+(a't^2+b't+c')=(a+a')t^2+(b+b')t+(c+c'),$$

$$\alpha\cdot(at^2+bt+c)=\alpha\cdot at^2+\alpha\cdot bt+\alpha\cdot c, \forall a,a',b,b',c,c',\alpha\in\mathbb{R}.$$

Rezolvare:

Arătăm mai întâi că mulțimea $P_2(t)$ formează un grup abelian împreună cu operația de adunare:

1. *Asociativitate*:

$$[(at^2+bt+c)+(a't^2+b't+c')]+(a''t^2+b''t+c'')=$$

$$=(at^2+bt+c)+[(a't^2+b't+c')+(a''t^2+b''t+c'')],$$

$$\forall a,a',a'',b,b',b'',c,c',c''\in\mathbb{R},$$

deoarece se reduce la asociativitatea adunării numerelor reale $((a+a')+a''=a+(a'+a''), etc.)$;

2. *Comutativitatea*:

$$(at^2+bt+c)+(a't^2+b't+c')=(a't^2+b't+c')+(at^2+bt+c),$$

$$\forall a,a',b,b',c,c',\alpha\in\mathbb{R},$$

deoarece se reduce la comutativitatea adunării numerelor reale $(a+a'=a'+a)$.

Scanned with CamScanner

3. *Element neutru*:

$$(at^2+bt+c)+(0t^2+0t+0)=at^2+bt+c, \forall a,b,c \in \mathbb{R},$$

întrucât 0 este element neutru la adunarea numerelor reale: $(a+0=0+a=a)$.

4. *Elemente simetrizabile*:

$$(at^2+bt+c)+(-at^2-bt-c)=0t^2+0t+0,$$

întrucât orice număr real a are un simetric față de adunare $(a+(-a)=0)$.

Să demonstrăm în continuare că împreună cu operația de înmulțire cu scalari, $P_2(t)$ verifică cele patru axiome:

5. $(\alpha+\beta)(at^2+bt+c)=\alpha\cdot(at^2+bt+c)+\beta\cdot(at^2+bt+c)$,

6. $\alpha\cdot(at^2+bt+c+a't^2+b't+c')=\alpha\cdot(at^2+bt+c)+\alpha\cdot(a't^2+b't+c')$,

7. $\alpha\cdot[\beta\cdot(at^2+bt+c)]=(\alpha\beta)\cdot(at^2+bt+c)$,

8. $1\cdot(at^2+bt+c)=at^2+bt+c, \forall a,a',b,b',c,c',\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

Acestea au loc deoarece

$(\alpha+\beta)\cdot a=\alpha\cdot a+\beta\cdot b$,

$\alpha\cdot(a+a')=\alpha\cdot a+\alpha\cdot a'$,

$\alpha\cdot(\beta\cdot a)=(\alpha\beta)\cdot a$,

$1\cdot a=a, \forall \alpha,\beta,a,a' \in \mathbb{R}$.

2. *Să se arate că următoarele mulțimi sunt subspații vectoriale ale spațiilor vectoriale indicate*:

a. $A=\{(a,0,2a) \mid a\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{R}^3$;

b. $D=\{f:[0,1]\to\mathbb{R} \mid f \text{derivabilă și } f=f'\}\subset$

Scanned with CamScanner

$$\subset \{f:[0,1]\to\mathbb{R} \mid f \text{ continuă pe } [0,1]\}$$

Rezolvări:

a. Fie $x=(a,0,2a), y=(b,0,2b)\in A,\ a,b\in\mathbb{R}$ şi $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Atunci

$$\alpha\cdot x+\beta\cdot y=(\alpha a,0,2\alpha a)+(\alpha b,0,2\beta b)=(\alpha a+\beta b,0,2(\alpha a+\beta b))\in A,$$

deci A este subspaţiu vectorial.

b. Fie $f,g\in D,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Atunci $\alpha f+\beta g$ este o funcţie derivabilă şi

$$(\alpha f+\beta g)'=(\alpha f)'+(\beta g)'=\alpha f'+\beta g'=\alpha f+\beta g,$$

deci $\alpha f+\beta g\in D$, prin urmare D este un subspaţiu vectorial.

3. *Să se studieze natura (dependenţa sau independenţa) următoarelor sisteme de vectori şi în caz de dependenţă liniară scrieţi relaţia dintre ei:*

a. $v_1=(1,2,x), v_2=(0,1,3), v_3=(x,2,1)$ *în* $\mathbb{R}^3$;

b. $v_1=t^2-t+1, v_2=t^2+2t, v_3=xt^2+xt+1$ *în* $P_2(t)$;

c. $A_1=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}2&1\\3&0\end{pmatrix}, A_3=\begin{pmatrix}3&1\\4&x\end{pmatrix}$ *în* $M_2(\mathbb{R})$.

Rezolvări:

a. Considerăm relaţia $\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\alpha_3v_3=0$. Prin înlocuirea vectorilor v_1,v_2,v_3, această relaţie este echivalentă cu sistemul liniar şi omogen:

$$\begin{cases}1\cdot\alpha_1+0\cdot\alpha_2+x\cdot\alpha_3=0\\2\cdot\alpha_1+1\cdot\alpha_2+2\cdot\alpha_3=0.\\x\cdot\alpha_1+3\cdot\alpha_2+1\cdot\alpha_3=0\end{cases}$$

Determinantul sistemului este

$$D=\begin{vmatrix}1&0&x\\2&1&2\\x&3&1\end{vmatrix}=x^2+6x-5,$$

deci sistemul este compatibil determinat dacă $x\neq1,5$ ($D\neq0$) şi compatibil nedeterminat dacă $x=1$ sau $x=5$. În primul caz admite numai soluţia banală

Scanned with CamScanner

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, deci sistemul de vectori este liniar independent, iar în cazurile x=1 sau x=5, admite şi soluţii nebanale, deci sistemul de vectori este liniar dependent. Astfel pentru x=1 avem $\begin{cases}\alpha_1 = -\alpha_3 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = -2\alpha_3\end{cases}$, adică $\alpha_1 = -\alpha_3$ şi $\alpha_2 = 0$, de unde pentru $\alpha_1 = 1$ avem $-v_1 + v_3 = 0$. Pentru x=5 avem $\begin{cases}\alpha_1 = -5\alpha_3 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = -2\alpha_3\end{cases}$, adică $\alpha_1 = -5\alpha_3$ şi $\alpha_2 = 8\alpha_3$ de unde pentru $\alpha_3 = 1$ avem $-5v_1 + 8v_2 + v_3 = 0$.

b. Relaţia $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$ este echivalentă cu sistemul omogen

$$\begin{cases}\alpha_1 + \alpha_2 + x\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 + x\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0\end{cases}.$$

Determinantul acestuia este

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ -1 & 2 & x \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 - x,$$

deci sistemul are pentru $x \neq 3$ numai soluţia banală, iar pentru x=3 rezultă $\begin{cases}\alpha_1 + \alpha_2 = -3\alpha_3 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 = -3\alpha_3\end{cases}$, de unde $\alpha_1 = -\alpha_3, \alpha_2 = -2\alpha_3$. Rezultă că în primul caz sistemul de vectori este liniar independent, iar în al doilea caz o relaţie de dependenţă este $-v_1 - 2v_2 + v_3 = 0$ (pentru $\alpha_3 = 1$).

c. Relaţia $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$ este echivalentă cu sistemul omogen

$$\begin{cases}\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + x\alpha_3 = 0\end{cases}.$$

Scanned with CamScanner

Matricea sistemului $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & x \end{pmatrix}$ are rangul 2 sau 3,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0,\ \Delta_3' = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = x - 1.$$

Dacă $x=1$, rang$A=2$, dacă $x \neq 1$, rang$A=3$. În primul caz soluțiile sistemului sunt date de $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = -3\alpha_3 \\ \alpha_2 = -\alpha_3 \end{cases}$, adică $\alpha_1 = -\alpha_3, \alpha_2 = -\alpha_3$, de unde sistemul de vectori (matrici) este liniar dependent şi o relație de dependență liniară este $-A_1 - A_2 + A_3 = 0$. În al doilea caz sistemul are numai soluția banală, deci sistemul de vectori este liniar independent.

4. *Să se determine care din polinoamele următoare aparțin spațiului generat de* $\{t^3, 2t^2+3, t^3-t+1\}$:

a. $2t^3 + t^2$;

b. $4t^3 - 4t^2 - t - 5$;

c. $2t^2 - t - 2x,\ x \in \mathbb{R}$.

Rezolvare:

Pentru ca cele trei polinoame să aparțină spațiului, trebuie ca acestea să fie combinații liniare de elementele sistemului de generatori. Deci vom avea:

a. $2t^3 + t^2 = \alpha_1 t^3 + \alpha_2(2t^2+3) + \alpha_3(t^3 - t + 1)$, de unde

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 2 \\ 2\alpha_2 = 1 \\ -\alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_2 + \alpha_3 = 2 \end{cases},$$

care este echivalent cu

Scanned with CamScanner

$$\begin{cases}\alpha_1 = 2\\ \alpha_2 = \dfrac{1}{2}\\ \alpha_3 = 0\\ \dfrac{3}{2} + 0 = 0\end{cases}$$, contradicție.

Rezultă că $2t^3 + t^2$ nu aparține spațiului.

b. $4t^3 - 4t^2 - t - 5 = \alpha_1 t^3 + \alpha_2(2t^2 + 3) + \alpha_3(t^3 - t + 1)$, de unde

$$\begin{cases}\alpha_1 + \alpha_3 = 4\\ 2\alpha_2 = -4\\ -\alpha_3 = -1\\ 3\alpha_2 + \alpha_3 = -5\end{cases},$$

care este echivalent cu

$$\begin{cases}\alpha_1 = 3\\ \alpha_2 = -2\\ \alpha_3 = 1\\ 3\cdot(-2) + 1 = -5\end{cases},$$

deci $4t^3 - 4t^2 - t - 5$ aparține spațiului.

c. $-2t^2 - t - 2x = \alpha_1 t^3 + \alpha_2(2t^2 + 3) + \alpha_3(t^3 - t + 1)$, de unde

$$\begin{cases}\alpha_1 + \alpha_3 = 0\\ 2\alpha_2 = -2\\ -\alpha_3 = -1\\ 3\alpha_2 + \alpha_3 = -2x\end{cases},$$

care este echivalent cu

$$\begin{cases}\alpha_1 = -1\\ \alpha_2 = -1\\ \alpha_3 = 1\\ -2 = -2x\end{cases}.$$

Scanned with CamScanner

Astfel pentru $x=1$ polinomul aparține spațiului, iar pentru $x \neq 1$ nu aparține.

5. *În spațiul $\mathbb{R}^3$ se dau vectorii $v_1 = (m,1,1), v_2 = (1,m,1), v_3 = (1,1,m)$. Să se determine valorile lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care aceştia formează o bază şi apoi să se determine coordonatele vectorilor*

$$x = (m+5, 2m+4, 3m+3) \quad \text{și} \quad y = (m+1, -2m+4, 3m-1)$$

în această bază.

Rezolvare:

Relația $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$ este echivalentă cu sistemul omogen

$$\begin{cases} m\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + m\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + m\alpha_3 = 0 \end{cases}.$$

Determinantul sistemului este:

$$D = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = m^3 - 3m + 1 = (m-1)^2(m+2).$$

Deci vectorii sunt liniari independenți pentru pentru $m \neq 1,-2$. Pentru ca $\{v_1, v_2, v_3\}$ să fie un sistem de generatori ai spațiului, trebuie ca orice vector $v = (a,b,c)$ să poată fi reprezentat ca o combinație liniară a celor trei vectori: $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$. Obținem sistemul liniar $\begin{cases} m\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = a \\ \alpha_1 + m\alpha_2 + \alpha_3 = b \\ \alpha_1 + \alpha_2 + m\alpha_3 = c \end{cases}$, care este compatibil determinat pentru $m \neq 1,-2$, deci trei vectori formează o bază în acest caz. Pentru a determina coordonatele unui vector v în această bază, rezolvăm sistemul de mai sus:

$$\Delta_1 = (m-1)(am + a - b - c),$$
$$\Delta_2 = (m-1)(bm + b - a - c),$$
$$\Delta_3 = (m-1)(cm + c - a - b),$$

Scanned with CamScanner

$$\alpha_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{am+a-b-c}{(m-1)(m+2)},$$

$$\alpha_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{bm+b-a-c}{(m-1)(m+2)},$$

$$\alpha_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{cm+c-a-b}{(m-1)(m+2)}.$$

Prin urmare coordonatele lui x vor fi:

$$\alpha_1 = \frac{m(m+5)-4m-2}{(m-1)(m+2)} = \frac{m^2+m-2}{(m-1)(m+2)} = 1, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 3.$$

Analog obținem coordonatele lui y: $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -2, \alpha_3 = 3$.

6. *Să se găsească formulele de transformare ale coordonatelor când se trece de la baza B la baza B', dacă* $B = \{1, 2t+3\}, B' = \{6t+4, 4t+8\}$ *în* $P_1(t)$.

Rezolvare:

Să determinăm mai întâi relațiile de trecere de la o bază la alta. Faptul că B, B' sunt baze în spațiul polinoamelor de grad cel mult unu se verifică imediat. Vectorii $v_1 = 1, v_2 = 2t+3$ se scriu în baza B':

$$v_1 = \alpha_1(6t+4) + \alpha_2(4t+8) = (6\alpha_1 + 4\alpha_2)t + 4\alpha_1 + 8\alpha_2 = 1,$$

$$6\alpha_1 + 4\alpha_2 = 0, 4\alpha_1 + 8\alpha_2 = 1, \alpha_1 = -\frac{1}{8}, \alpha_2 = \frac{3}{16}, v_1 = -\frac{1}{8}u_1 + \frac{3}{16}u_2,$$

$$v_2 = \beta_1(6t+4) + \beta_2(4t+8) = (6\beta_1 + 4\beta_2)t + (4\beta_1 + 8\beta_2) = 2t+3$$

$$6\beta_1 + 4\beta_2 = 2, 4\beta_1 + 8\beta_2 = 3, \beta_1 = \frac{1}{8}, \beta_2 = \frac{5}{16}, v_2 = \frac{1}{8}u_1 + \frac{5}{16}u_2.$$

La fel $u_1 = 6t+4, u_2 = 4t+8$ se reprezintă în baza B ca

$$u_1 = 3v_2 - 5v_1, u_2 = 2v_2 + 2v_1.$$

Fie $x=at+b$ un polinom oarecare şi descompunerile sale după cele două baze: $x = x_1v_1 + x_2v_2$ şi $x = y_1u_1 + y_2u_2$. Să determinăm legătura între coordonatele x_1, x_2 şi y_1, y_2 în cele două baze. Înlocuind vectorii v_1, v_2 cu descompunerile lor în baza B', obținem

Scanned with CamScanner

$$x = x_1\left(-\frac{1}{8}u_1 + \frac{3}{16}u_2\right) + x_2\left(\frac{1}{8}u_1 + \frac{5}{16}u_2\right) = y_1u_1 + y_2u_2 .$$

După teorema descompunerii unice a unui vector într-o bază, rezultă

$$y_1 = -\frac{1}{8}x_1 + \frac{1}{8}x_2,\ y_2 = \frac{3}{16}x_1 + \frac{5}{16}x_2 .$$

Similar, înlocuind vectorii u_1 şi u_2 prin descompunerile lor în baza B, obţinem $x_1 = -5y_1 + 2y_2, x_2 = 3y_1 + 2y_2$.

Astfel matricea trecerii de la baza B la baza B' este $\begin{pmatrix} -1/8 & 1/8 \\ 3/16 & 5/16 \end{pmatrix}$, iar de la baza B' la baza B este $\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

7. *Să se arate că funcţia* $\langle \cdot,\cdot \rangle$ *definită pe* $\mathbf{R}^2$ *prin*

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2 ,\ x = (x_1, y_1),\ y = (y_1, y_2)$$

este un produs scalar.

Rezolvare:

Trebuie să verificăm axiomele 1)-4) din definiţia produsului scalar. Avem:

1. $\langle x,x\rangle = x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_1 + 5x_2^2 = x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 = (x_1 - 2x_2)^2 + x_2^2 \geq 0$ şi $\langle x,x\rangle = 0$ implică $x_1 - 2x_2 = x_2 = 0$ adică $x = (x_1, x_2) = 0$;

2. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ deoarece
$$x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2 = y_1x_1 - 2y_1x_2 - 2y_2x_1 + 5y_2x_2 ;$$

3. $$\begin{aligned}\langle x + y, z\rangle &= (x_1 + y_1)z_1 - 2(x_1 + y_1)z_2 - 2(x_2 + y_2)z_1 + 5(x_2 + y_2)z_2 = \\ &= x_1z_1 - 2x_1z_2 - 2x_2z_1 + 5x_2z_2 + y_1z_1 - 2y_1z_2 - 2y_2z_1 + 5y_2z_2 = \\ &= \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle;\end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned}\langle \alpha x, y\rangle &= \alpha x_1y_1 - 2\alpha x_1y_2 - 2\alpha x_2y_1 + 5\alpha x_2y_2 = . \\ &= \alpha(x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2) = \alpha\langle x, y\rangle\end{aligned}$$

Scanned with CamScanner

Prin urmare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ este un produs scalar.

8. *Să se determine o bază ortonormată în R^3 care să conțină vectorii:*

$$v_1=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right),\ v_2=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right).$$

Rezolvare:

Fie $v=(x_1,x_2,x_3)$ al treilea vector al bazei. Pentru determinarea lui avem condițiile $\|v\|=1, \langle v_1,v\rangle=\langle v_2,v\rangle=0$ (faptul că $\|v_1\|=\|v_2\|=1$ și $\langle v_1,v_2\rangle=0$ se verifică imediat). Aceste condiții sunt echivalente cu sistemul: $\begin{cases}x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\\ 2x_1-2x_2+x_3=0\\ x_1+2x_2+2x_3=0\end{cases}$. Din ultimele două ecuații obținem $x_1=-x_3$ și $x_2=-\frac{1}{2}x_3$, astfel că, înlocuind în prima, obținem $\frac{9}{4}x_3^2=1$, de unde $x_1=-x_3=\pm\frac{2}{3}$ și $x_2=\pm\frac{1}{3}$. Așadar $v=\left(\pm\frac{2}{3},\pm\frac{1}{3},\mp\frac{2}{3}\right)$ poate fi al treilea vector al bazei cerute (dimensiunea acestui spațiu fiind trei).

10.1. Exerciții propuse

1. *Să se cerceteze dacă următoarele mulțimi sunt subspații vectoriale ale spațiilor vectoriale indicate:*

a. $\{(x_1,x_2,x_2)\mid x_1-x_2=x_3\}\subset\mathbb{R}^3$;

b. $\{t^2+at-a|a\in R\}\subset P_2(t)$;

c. $G=\left\{\begin{pmatrix}a & 0\\ 1 & a\end{pmatrix}\mid a\in\mathbb{R}\right\}\subset M_2(\mathbb{R})$;

d. $\{ae^x+bx\mid a,b\in\mathbb{R}\}\subset\{f:[0,1]\mid f\,continuă\}$.

2. *Să se cerceteze dependența liniară a vectorilor și în caz afirmativ să se scrie relația dintre ei:*

Scanned with CamScanner

a. $v_1 = 1+5i, v_2 = 3-i$ *în* $\mathbb{C}$;

b. $v_1 = (1,2,3), v_2 = (-1,0,1), v_3 = (1,1,0), v_4 = (1,3,4)$ *în* $\mathbb{R}^3$;

c. $v_1 = t^3 - t, v_2 = 2t^3 + t, v_3 = t$ *în* $P_2(t)$;

d. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}$ *în* $M_2(\mathbb{R})$;

e. $v_1 = (1,0,1,0), v_2 = (x,x,1,0), v_3 = (1,x,0,x)$ *în* $\mathbb{R}^4$, $x \in \mathbb{R}$.

3. *Să se determine care dintre vectorii indicați aparțin spațiului generat de sistemul dat*:

a. $v_1 = (1,1,8), v_2 = (3,1,2), S = \{(-1,-7,1),(1,5,2)\}$;

b. $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$;

c. $v_1 = t^3 + 2t^2 + 1, v_2 = -t^3 - 3t + 4, S = \{t^2 + 1, t^3 + t, -t^2 + t\}$;

d. $v_1 = \cos 2x, v_2 = 2, v_3 = e^x, S = \{\sin^2 x, \cos^2 x\}$;

e. $v_1 = 1 - i, v_2 = 3 + 3i, S = \{1 + i, -2 - 2i\}$.

4. *Dacă sistemele de vectori de mai jos formează baze în spațiile la care aparțin, determinați componentele vectorului v corespunzător în fiecare bază*:

a. $v_1 = (2,1,1), v_2 = (1,2,1), v_3 = (1,1,2), v = (1,1,1)$;

b. $v_1 = (1,1,0,0), v_2 = (1,0,1,0), v_3 = (1,0,0,1), v_4 = (1,1,1,1), v = (0,1,1,1)$;

c. $v_1 = 1 + i, v_2 = 1 - i, v_3 = 1 + 2i, v = i$;

d. $v_1 = t, v_2 = t^2 + 1, v_3 = t^2 - 2t, v = t + 1$;

e. $A_1 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

f. $v_1 = (1,2,3,m), v_2 = (1,1,-1,2), v_3 = (m,-1,-1,0),$

Scanned with CamScanner

$v_4 = (-1,1,-1,-2)$, $v_5 = (1,0,0,0)$.

5. *Să se găsească matricea trecerii de la baza B la baza B' în următoarele cazuri:*

a. $B = \{(1,2),(0,1)\}$, $B' = \{(3,2),(1,0)\}$ *în* $\mathbb{R}^2$;

b. $B = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$, $B' = \{(1,2,0),(2,0,1),(0,1,2)\}$ *în* $\mathbb{R}^3$;

c. $B = \{t^3, t^2+1, t+2, 3\}$, $B' = \{t^3+1, t^2+t, t+1, t^3+t\}$ *în* $P_3(t)$.

6. *Fie bazele din* $\mathbb{R}^3$:

$$B = \{(1,2,3),(2,3,1),(1,0,1)\},\ B' = \{(1,-2,1),(2,1,1),(1,1,-2)\}$$

şi un vector v având coordonatele $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *în baza B şi* $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ *în baza B'. Să se determine:*

a. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *dacă* $\beta_1 = 1, \beta_2 = 0, \beta_3 = -1$;

b. $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ *dacă* $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = -1$;

c. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ *dacă* $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (1,1,1)$.

7. *Să se construiască o bază ortonormată a spaţiului* $\mathbb{R}^3$ *care să conţină vectorii:*

a. $v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $v_2 = (0,0,1)$;

b. $v_1 = \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right)$, $v_2 = \left(-\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{3}{7}\right)$.

8. *Care din următoarele funcţii sunt produse scalare pe* $\mathbb{R}^3$:

a. $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1$;

b. $\langle x, y\rangle = x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + \alpha x_2y_2$;

c. $\langle x, y\rangle = x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_1 + 1$;

Scanned with CamScanner

d. $\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + 2x_2 y_2$.

10.4. Indicații şi răspunsuri

1. **a.** da;

   b. nu;

   c. nu;

   d. da.

2. **a.** independenți;

   b. dependenți, $v_1 + v_2 + v_3 - v_4 = 0$;

   c. dependenți, $-2v_1 + v_2 - 3v_3 = 0$;

   d. independenți;

   e. independenți dacă $x \neq 0$, dependenți dacă $x=0$, $v_1 - v_2 - v_3 = 0$.

3. **a.** $v = (1,1,8) = 2u_1 + 3u_2$;

   b. $A_1 = 2B_1 + B_2 - 3B_3$, $A_2 = -3B_1 - 5B_2 + 31B_3$;

   c. $v_1 = u_1 + u_2 - u_3$;

   d. $v_1 = u_2 - u_1$, $v_2 = 2u_1 + 2u_2$;

   e. $v_2 = 3u_1$.

4. **a.** $v = \frac{1}{4}(v_1 + v_2 + v_3)$;

   b. $v = -\frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2 - \frac{1}{2}v_3 + \frac{3}{2}v_4$;

   c. nu formează bază, fiind liniar dependenți;

   d. $v = -v_1 + v_2 - v_3$;

Scanned with CamScanner

e. formează bază dacă $a \in \mathbb{R} - \{-3,1\}$, $A = \frac{1}{4(a+3)}(A_1 + A_2 + A_3 + A_4)$;

f. $m \neq -\frac{1}{2}$, $v = \frac{1}{2m+1}v_1 + \frac{1-m}{8m+4}v_2 + \frac{5}{4m+2}v_3 + \frac{m+1}{8m+4}v_4$.

5. **a.** $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ -2 & -3/2 \end{pmatrix}$; **b.** $\begin{pmatrix} 2/9 & -1/9 & 5/9 \\ 5/9 & 2/9 & -1/9 \\ -1/9 & 5/9 & 2/9 \end{pmatrix}$;

c. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

6. **a.** $\alpha_1 = \frac{3}{4}, \alpha_2 = -\frac{3}{2}, \alpha_3 = \frac{9}{4}$;

b. $\beta_1 = 3, \beta_2 = -3, \beta_3 = 3$;

c. $\alpha_1 = \frac{6}{7}, \alpha_2 = -\frac{4}{7}, \alpha_3 = \frac{16}{7}, \beta_1 = \frac{1}{7}, \beta_2 = \frac{11}{7}, \beta_3 = -\frac{9}{7}$.

7. **a.** $v_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$; **b.** $v_3 = \left(\frac{3}{7}, -\frac{6}{7}, \frac{2}{7}\right)$.

8. **a.** nu, $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2$ şi nu $x=0$;

b. da pentru $a>9$;

c. nu;

d. da.

Scanned with CamScanner

11. FORME LINIARE. FORME PĂTRATICE

11.1. Considerații teoretice

Definiția 1. Fie V și V' două spații vectoriale peste același corp K. O aplicație $f:V \to V'$ se numește ***operator liniar*** dacă

$$f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y), \forall x, y \in V, \forall \alpha, \beta \in K.$$

Definiția 2. Un operator liniar $T:V \to V$ se numește ***transformare liniară***. Dacă $B=\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ este o bază în V și

$$T(e_i)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j, i=\overline{1,n},$$

matricea $A=(a_{ij})$ se numește ***matricea transformării liniare***.

Definiția 3. Spunem că transformarea liniară T este:

1. ***nedegenerată*** dacă $\det A \neq 0$;
2. ***degenerată*** dacă $\det A=0$.

Definiția 4. Transformarea liniară T se numește:

1. ***ortogonală*** dacă matricea ei A este ortogonală;
2. ***ortonormală*** dacă matricea ei A este ortonormală $(A^t \cdot A=I_n)$.

Teorema 1. *Dacă y=T(x) este o transformare liniară ortonormală atunci ||x||=||y|| (păstrează lungimea vectorului).*

Definiția 5. Vectorul $u \in V$-$\{0\}$ se numește ***vector propriu*** pentru transformarea liniară $T:V \to V$, dacă există $\lambda \in K$, astfel încât $T(u)=\lambda u$. Scalarul $\lambda \in K$ se numește ***valoare proprie***.

Scanned with CamScanner

Teorema 2. *Valorile proprii sunt rădăcinile ecuației caracteristice* $\det(a_{ij} - \lambda\delta_{ij}) = 0$, $A = (a_{ij})$ *fiind matricea transformării liniare, iar vectorii proprii sunt soluțiile sistemului*

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{ij} - \lambda\delta_{ij})x_j = 0, i = \overline{1,n}.$$

Definiția 6. Operatorul liniar

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f(x) = cx = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n,$$

unde $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se numește ***formă liniară***.

Definiția 7. Sistemul de forme liniare $f_1, f_2, \ldots, f_m$, unde $f_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, i = \overline{1,m}$ se numește:

1. ***liniar dependent*** dacă $\exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2 \neq 0$, astfel încât $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_m f_m = 0$;
2. ***liniar independent*** dacă relația $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_m f_m = 0$ are loc numai pentru $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$.

Definiția 8. Se numește ***formă pătratică*** pe spațiul vectorial $\mathbb{R}^n$ o aplicație $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de forma

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j,\ a_{ij} = a_{ji}, i, j = \overline{1,n}.$$

Definiția 9. Dată o formă pătratică f atunci:

1. matricea $A = (a_{ij})$ se numește ***matricea formei pătratice***;
2. $r = \text{rang}A$ se numește ***rangul formei pătratice***;
3. $\Delta = \det A$ se numește ***discriminantul formei pătratice***;

Scanned with CamScanner

4. forma se numeşte ***nedegenerată*** dacă $\Delta \neq 0$;
5. forma se numeşte ***degenerată*** dacă $\Delta = 0$;
6. forma se numeşte ***pozitiv definită*** dacă $f(x,x) > 0, \forall x \neq 0$;
7. forma se numeşte ***pozitiv semidefinită*** dacă $f(x,x) \geq 0, \forall x$;
8. forma se numeşte ***negativ definită*** dacă $f(x,x) < 0, \forall x \neq 0$;
9. forma se numeşte ***negativ semidefinită*** dacă $f(x,x) \leq 0, \forall x$;
10. forma se numeşte ***semidefinită*** dacă nu păstrează semn constant.

Definiţia 10. Spunem că o formă pătratică *f* este adusă la ***forma canonică*** dacă printr-o transformare liniară nedegenerată $x = T(y)$ este pusă sub forma $f = b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + \ldots + b_n y_n^2$.

Teorema 3. *Dacă forma pătratică f are matricea* $A = (a_{ij})$

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0, k = \overline{1,n} \text{ şi } \Delta_0 = 1,$$

atunci există o bază B în care f are forma canonică

$$f(x,y) = \sum_{k=1}^{n} p_k y_k^2, \text{ cu } p_k = \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}, k = \overline{1,n}.$$

11.2. Exerciţii rezolvate

1. *Să se determine care din următoarele aplicaţii sunt operatori liniari:*

a. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x_1, x_2) = (3x_1 - x_2, 2x_2)$;

b. $f : P_2(t) \to P_2(t), f(at^2 + bt + c) = (a + c)t^2 - 2bt + a$;

c. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R},\ f(x + iy) = x + y^2$.

Scanned with CamScanner

Rezolvare:

a. Fie $x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2), \alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Avem

$$\alpha x+\beta y=(\alpha x_1+\beta y_1, \alpha x_2+\beta y_2)$$

de unde

$$f(\alpha x+\beta y)=(3(\alpha x_1+\beta y_1)-(\alpha x_2+\beta y_2), 2(\alpha x_2+\beta y_2))=$$
$$=(\alpha(3x_1-x_2)+\beta(3y_1-y_2), \alpha(2x_2)+\beta(y_2))=$$
$$=\alpha(3x_1-x_2, 2x_2)+\beta(3y_1-y_2, 2y_2)=\alpha f(x)+\beta f(y).$$

Deci f este un operator (tranformare) liniar.

b. Fie $x=at^2+bt+a, y=dt^2+et+f, a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R}, \alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Avem

$$\alpha x+\beta y=(\alpha a+\beta d)t^2+(\alpha b+\beta e)t+(\alpha c+\beta f),$$

de unde

$$f=(\alpha x+\beta y)=(\alpha a+\beta d+\alpha c+\beta f)t^2-2(\alpha b+\beta e)t+\alpha a+\beta d=$$
$$=\alpha[(a+c)t^2-2bt+a]+\beta[(d+f)t^2-2et+d]=\alpha f(x)+\beta f(y).$$

Aşadar f este un operator liniar.

c. Fie $z_1=x_1+iy_1, z_2=x_2+iy_2, \alpha,\beta\in R$. Avem

$$\alpha z_1+\beta z_2=\alpha x_1+\beta x_2+i(\alpha y_1+\beta y_2)$$

de unde

$$f(\alpha z_1+\beta z_2)=\alpha x_1+\beta x_2+(\alpha y_1+\beta y_2)^2=\alpha x_1+\beta x_2+2\alpha\beta y_1 y_2+\beta^2 y_2^2.$$

Cum $\alpha f(z_1)+\beta f(z_2)=\alpha(x_1+y_1^2)+\beta(x_2+y_2^2)$, rezultă că $f(\alpha z_1+\beta z_2)\neq\alpha f(z_1)+\beta f(z_2)$ şi deci f nu este operator liniar.

2. *Fie transformarea liniară* $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ *definită într-o bază prin matricea* $A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$. *Să se verifice că T este o transformare ortogonală,* $A\cdot A^t=I_3$ *şi că păstrează lungimea vectorului.*

Scanned with CamScanner

Rezolvare:

Fie $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ şi $y=(y_1,y_2,y_3)=T(x)$, adică

$$y_1=\frac{1}{3}(2x_1-x_2+2x_3),$$

$$y_2=\frac{1}{3}(x_1+2x_2+2x_3),$$

$$y_3=\frac{1}{3}(2x_1-2x_2+x_3).$$

Verificăm că $\|x\|=\|y\|,\ \forall x\in\mathbb{R}^3$. Avem că:

$$\begin{aligned}\|y\|^2=y_1^2+y_2^2+y_3^2=\frac{1}{9}(&4x_1^2+x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+8x_1x_3-4x_2x_3+\\&+x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3+4x_1^2+\\&+4x_2^2+x_3^2-8x_1x_2+4x_1x_3-4x_2x_3)=\\=x_1^2+x_2^2+x_3^2=\|x\|^2.&\end{aligned}$$

Coloanele matricei A sunt ortogonale:

$\langle(2,1,2),(1,2,-2)\rangle=2\cdot1+1\cdot2+2\cdot(-2)=0$.

De asemenea

$$A\cdot A^t=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}2&1&-2\\1&2&2\\2&-2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1&2\\1&2&-2\\-2&2&1\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}9&0&0\\0&9&0\\0&0&9\end{pmatrix}=I_3.$$

3. *Să se calculeze valorile şi vectorii proprii pentru transformarea liniară $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definită într-o bază B prin matricea*

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix}.$$

Rezolvare:

Valorile proprii sunt rădăcinile ecuaţiei caracteristice

Scanned with CamScanner

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ sau } (6-\lambda)(\lambda^2-3)=0.$$

Aceasta are rădăcinile $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = -\sqrt{3}, \lambda_3 = \sqrt{3}$. Vectorii proprii sunt soluții ale sistemului:

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + (3-\lambda)x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + (2-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}.$$

Pentru λ_1=6 avem $\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$. Rangul sistemului este 2, astfel că soluția este $x_1 = x_2 = x_3 = t$, deci un vector propriu corespunzător valorii proprii λ_1=6 este v_1=(1,1,1).

Pentru $\lambda_2 = -\sqrt{3}$ avem $\begin{cases} (1+\sqrt{3})x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + (3+\sqrt{3})x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + (2+\sqrt{3})x_3 = 0 \end{cases}$. Soluția sistemului este $x_1 = t, x_2 = (\sqrt{3}-2)t, x_3 = (1-\sqrt{3})t$, astfel că un vector propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_2 = -\sqrt{3}$ este $v_2 = (1, \sqrt{3}-2, 1-\sqrt{3})$.

Analog un vector propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_3 = \sqrt{3}$ este $v_3 = (1, -2-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$.

4. *Să se aducă la forma canonică următoarele forme pătratice și să se precizeze tipul fiecăreia:*

a. $f(x,x) = x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3$;

b. $f(x,x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3$;

c. $f(x,x) = 3x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_3$.

Rezolvare:

Vom folosi pentru cele trei forme metode diferite:

Scanned with CamScanner

a. *Metoda valorilor proprii (transformărilor ortogonale)*

a1. Scriem matricea formei pătratice: $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 0\\ -2 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

a2. Determinăm valorile proprii şi vectorii proprii normaţi corespunzători:

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 2 & -2\\ 2 & 1-\lambda & 0\\ -2 & 0 & -1-\lambda\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \lambda(9-\lambda^2)=0.$$

Valorile proprii sunt $\lambda_1=0, \lambda_2=-3, \lambda_3=3$. Pentru $\lambda_1=0$, din sistemul $\begin{cases}2x_2-2x_3=0\\ 2x_1+x_2=0\\ -2x_1-x_3=0\end{cases}$ determinăm vectorul propriu normat, adică $v_1=\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$. Analog obţinem pentru $\lambda_2=-3$, $v_2=\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$ şi pentru $\lambda_3=3$, $v=\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$.

a3. Cu transformarea ortogonală T având matricea $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$, forma f este redusă la forma canonică $f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3y_3^2=-3y_2^2+3y_3^2$. Aceasta este semidefinită, întrucât nu păstrează semn constant şi degenerată $(\Delta=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=0)$.

b. *Metoda lui Gauss*

În acest exemplu avem coeficientul unuia din pătrate diferit de zero. Alegem x_1^2 şi termenii care conţin pe x_1, după care formăm un pătrat cu aceştia.

Scanned with CamScanner

Deci $f=(x_1^2+2x_1x_2)+2x_2^2+5x_3^2+4x_2x_3=(x_1+x_2)^2+x_2^2+5x_3^2+4x_2x_3$. În continuare procedăm similar. Avem

$$f=(x_1+x_2)^2+(x_2^2+4x_2x_3)+5x_3^2=(x_1+x_2)^2+(x_2+2x_3)^2+x_3^2.$$

Dacă punem $y_1=x_1+x_2$, $y_2=x_2+3x_3$, $y_3=x_3$, putem scrie $f(y,y)=y_1^2+y_2^2+y_3^2$. Se observă că f este pozitiv definită şi nedegenerată.

c. *Metoda lui Jacobi*

Matricea formei pătratice este $A=\begin{pmatrix}3&0&2\\0&1&0\\2&0&0\end{pmatrix}$. Avem

$$\Delta_0=1,\ \Delta_1=|3|=3,\ \Delta_2=\begin{vmatrix}3&0\\0&1\end{vmatrix}=3,\ \Delta_3=\begin{vmatrix}3&0&2\\0&1&0\\2&0&0\end{vmatrix}=-4,$$

$$p_1=\frac{\Delta_0}{\Delta_1}=\frac{1}{3},\ p_2=\frac{\Delta_1}{\Delta_2}=1,\ p_3=\frac{\Delta_2}{\Delta_3}=-\frac{3}{4},$$

deci există o bază în care f are forma canonică $f(y,y)=\frac{1}{3}y_1^2+y_2^2-\frac{3}{4}y_3^2$. Se observă că f este semidefinită şi nedegenerată.

11.3. Exerciţii propuse

1. *Să se determine care din următoarele aplicaţii sunt operatori liniari:*

a. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3, f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,-3x_1,x_2)$;

b. $f:P_2(t)\to P_2(t), f(at^2+bt+c)=2at+b$;

c. $f:\mathbf{C}\to\mathbf{C}, f(x+iy)=x^2+y^2$;

d. $f:M_2(\mathbb{R})\to M_2(\mathbb{R}), f\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}a&2b\\3c&4d\end{pmatrix}$;

e. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2, f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2,x_2+x_3)$;

Scanned with CamScanner

f. $f : P_2(t) \to \mathbb{R}, f(at^2 + bt + c) = abc$.

2. *Să se cerceteze care din transformările liniare de mai jos sunt ortogonale și să se verifice în caz afirmativ că păstrează lungimile vectorilor:*

a. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, y = T(x_1, x_2, x_3) = \left(-x_1, \frac{x_2}{\sqrt{2}} + \frac{x_3}{\sqrt{2}}, -\frac{x_2}{\sqrt{2}} + \frac{x_3}{\sqrt{2}} \right)$;

b. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, y = T(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{\sqrt{2}} + \frac{x_2}{\sqrt{2}}, \frac{x_2}{\sqrt{2}} - \frac{x_3}{\sqrt{2}}, \frac{x_1}{\sqrt{2}} + \frac{x_3}{\sqrt{2}} \right)$;

c. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ y = T(x_1, x_2, x_3) =$

$$= \left(\frac{x_1 - 2x_2 - 2x_3}{3}, \frac{-2x_1 + x_2 - 2x_3}{3}, \frac{-2x_1 - 2x_2 + x_3}{3} \right);$$

d. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ y = T(x_1, x_2, x_3) =$

$$= \left(\frac{2x_1 + 6x_2 + 3x_3}{7}, \frac{-3x_1 - 2x_2 + 6x_3}{7}, \frac{6x_1 - 3x_2 + 2x_3}{7} \right).$$

3. *Să se calculeze valorile și vectorii proprii pentru transformările liniare definite prin matricele:*

a. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; b. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 9 & 5 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$; c. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

4. *Să se aducă la forma canonică următoarele forme pătratice și să se precizeze tipul fiecăreia:*

a. $f(x,x) = x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 12x_2x_3$;

b. $f(x,x) = 4x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 + 12x_2x_3$;

c. $f(x,x) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$

d. $f(x,x) = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_2x_3$;

Scanned with CamScanner

e. $f(x,x) = x_1^2 + 6x_2^2 - 2x_1x_3$;

f. $f(x,x) = x_1^2 + 5x_2^2 + 13x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$;

g. $f(x,x) = -x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3$;

h. $f(x,x) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

11.4. Răspunsuri şi indicaţii:

1. **a.** da;

b. da;

c. nu;

d. da;

e. nu.

2. **a.** da;

b. nu;

c. da;

d. da.

3. **a.** $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = \lambda_3 = 3, v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,0,-1), v_3 = (0,1,-1)$,

b. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 12, v_1 = (-1,1,-2), v_2 = (3,1,-1), v_3 = (1,-4,-7)$;

c. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3, v_1 = (1,0,0), v_2 = (4,1,0), v_3 = (29,12,2)$.

4. **a.** $f = y_1^2 + \frac{1}{3}y_2^2 - \frac{1}{3}y_3^2$ semidefinită, nedegenerată;

b. $f = y_1^2 + y_2^2 - 64y_3^2$ semidefinită, nedegenerată;

c. Facem transformarea liniară (T_1): $y_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_2 = \frac{x_1 - x_2}{2}, y_3 = x_3$. Forma devine $f = y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3$. Formăm un pătrat cu termenii care conţin

y_1 şi avem $f = (y_1 + y_3)^2 - y_2^2 - y_3^2$. Facem transformarea liniară (T_2): $z_1 = y_1 + y_3$, $z_2 = y_2$, $z_3 = y_3$. Obţinem $f = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$, care este semidefinită şi nedegenerată.

d. $f = y_1^2 + y_2^2 + \frac{7}{4} y_3^2$, pozitiv definită, nedegenerată;

e. $f = y_1^2 + 6y_2^2 - y_3^2$ semidefinită, nedegenerată;

f. $f = y_1^2 + y_2^2$, pozitiv semidefinită, degenerată;

g. $f = -y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$, negativ definită, nedegenerată;

h. $f = -\frac{1}{2} y_1^2 - \frac{1}{2} y_2^2 - \frac{1}{2} y_3^2$, negativ definită, nedegenerată.

Scanned with CamScanner

PARTEA A TREIA

Probabilități

Scanned with CamScanner

12. CÂMP BORELIAN DE PROBABILITATE

12.1. Considerații teoretice

A. EVENIMENTE

Definiția 1. Se numeşte ***probă*** orice realizare a unui experiment.

Definiția 2. Se numeşte ***eveniment*** orice rezultat al unui experiment despre care putem spune că s-a realizat sau că nu s-a realizat, după efectuarea unei probe.

Definiția 3. Un eveniment se numeşte:

1. ***sigur*** dacă apare în orice probă a experimentului;
2. ***imposibil*** dacă nu poate să apară în nici o probă;
3. ***întâmplător*** sau ***aleator*** dacă poate să apară sau să nu apară într-o probă a experimentului considerat.

Notăm cu Ω evenimentul sigur, cu Φ evenimentul imposibil şi cu litere mari ale alfabetului (eventual indexate) evenimentele aleatoare (A, B, A_1, ...).

Definiția 4. Se numeşte ***eveniment sumă*** (sau ***reuniune***) a două evenimente A şi B asociate aceluiaşi experiment, evenimentul care se realizează ori de câte ori se realizează A sau B şi se notează cu $A \cup B$.

Definiția 5. Se numeşte ***eveniment produs*** (sau ***intersecție***) a două evenimente A şi B asociate aceluiaşi experiment, evenimentul care se realizează simultan cu evenimentele A şi B şi se notează cu $A \cap B$.

Definiția 6. Se numeşte ***eveniment diferență*** a evenimentelor A şi B asociate aceluiaşi experiment, evenimentul care constă în realizarea lui A şi nerealizarea lui B şi se notează cu $A \setminus B$.

Scanned with CamScanner

Definiția 7. Spunem că evenimentul A ***implică*** evenimentul B dacă B se realizează ori de câte ori se realizează A şi scriem $A \subset B$.

Definiția 8. Două evenimente A şi B se numesc ***echivalente*** dacă $A \subset B$ şi $B \subset A$, adică oricare dintre ele se realizează numai atunci când se realizează şi celălalt. Scriem $A = B$.

Teorema 1. *Mulțimea evenimentelor asociate unui experiment se împarte în clase de echivalență.*

Definiția 9. Spunem că două evenimente A şi B sunt:

1. ***incompatibile*** dacă $A \cap B = \Phi$, adică nu se pot realiza simultan;
2. ***compatibile*** dacă $A \cap B \neq \Phi$, adică se pot realiza simultan.

Definiția 10. Spunem că evenimentele A şi B sunt ***contrare*** (***opuse*** sau ***complementare***) dacă sunt incompatibile şi reuniunea lor este evenimentul sigur, adică $A \cap B = \Phi$ şi $A \cup B = \Omega$.

Notăm evenimentul contrar lui A cu C_A sau $\overline{A}$.

Observația 1:

Datorită analogiei între evenimente şi mulțimi se folosesc notațiile din teoria mulțimilor.

Teorema 2. (*Proprietăți ale operațiilor cu evenimente*)

1. $A \cup B = B \cup A, (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$
   $A \cup A = A, A \cup \Phi = A, A \cup \Omega = \Omega$;
2. $A \cap B = B \cap A, (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$
   $A \cap A = A, A \cap \Phi = \Phi, A \cap \Omega = A$;
3. $A \cap \overline{A} = \Phi, A \cup \overline{A} = \Omega, \overline{\Omega} = \Phi, \overline{\Phi} = \Omega, \overline{\overline{A}} = A,$
   $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
4. $A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k \right) = \bigcup_{k=1}^{n} (A \cap B_k), A \cup \left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k \right) = \bigcap_{k=1}^{n} (A \cup B_k)$.

Scanned with CamScanner

B. CÂMP BORELIAN DE EVENIMENTE

Definiția 1. Fiind dată o mulțime arbitrară nevidă Ω, numim ***corp de mulțimi (părți) ale lui Ω*** o familie nevidă $K \subset P(\Omega)$ astfel încât:

1. oricare ar fi $A \in K$ rezultă că $\overline{A} \in K$;
2. oricare ar fi A și $B \in K$ rezultă că $A \cup B \in K$.

Teorema 1. *Dacă K este un corp de mulțimi ale lui Ω atunci*:

1. $\Omega \in K$;
2. $\Phi \in K$;
3. $A \cap B \in K$, $\forall\, A, B \in K$;
4. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in K, \forall A_i \in K, i = \overline{1,n}$;
5. $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in K, \forall A_i \in K, i = \overline{1,n}$;
6. $A \setminus B \in K$, $\forall\, A, B \in K$;
7. $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in K$, $\forall\, A, B \in K$.

Definiția 2. Fiind dată o mulțime arbitrară infinită Ω, numim ***σ-corp de mulțimi (corp borelian)*** ale lui Ω o familie nevidă $K \subset P(\Omega)$ astfel încât:

1. oricare ar fi $A \in K$ rezultă că $\overline{A} \in K$;
2. oricare ar fi $A_n \in K$, rezultă că $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n \in K$.

Teorema 2. *Orice corp borelian este corp de mulțimi, dar nu și reciproc.*

Definiția 3. Numim ***corp (borelian) de evenimente*** o pereche (Ω, K) în care Ω este o mulțime nevidă (infinită), iar K este un corp de mulțimi (borelian) al lui Ω.

Scanned with CamScanner

Teorema 3. *Dacă* $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_n\}$ *şi* $K=P(\Omega)$, *atunci câmpul de evenimente corespunzătoare conţine* 2^n *evenimente* ($\omega_1,\omega_2,...,\omega_n$ se numesc ***evenimente elementare***, iar restul ***evenimente compuse***).

C. CÂMP BORELIAN DE PROBABILITATE

Definiţia 1. Fie (Ω,K) un câmp de evenimente. O funcţie $P:K\rightarrow R$ se numeşte ***probabilitate*** dacă:

P1. $P(A)\geq 0, \forall A\in K$;

P2. $P(A\cup B)=P(A)+P(B), \forall A,B\in K, A\cap B=\Phi$;

P3. $P(\Omega)=1$.

Definiţia 2. Numim ***câmp de probabilitate*** un triplet (Ω,K,P) în care (Ω,K) este un câmp de evenimente, iar P o probabilitate definită pe K.

Teorema 1. *Într-un câmp de probabilitate* (Ω,K,P) *avem următoarele proprietăţi*:

P4. $P(\overline{A})=1-P(A), \forall A\in K$;

P5. $P(\Phi)=0$;

P6. $P(B\setminus A)=P(B)-P(A), \forall A,B\in K, A\subset B$;

P7. $P(A)\leq P(B), \forall A,B\in K, A\subset B$;

P8. $0\leq P(A)\leq 1, \forall A\in K$;

P9. $P(B\setminus A)=P(B)-P(A\cap B), \forall A,B\in K$;

P10. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B), \forall A,B\in K$;

P11. $P(A\Delta B)=P(A)+P(B)-2P(A\cap B), \forall A,B\in K$;

P12. $P(A\cup B)\leq P(A)+P(B), \forall A,B\in K$;

P13. $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i), \forall A_i\in K, i=\overline{1,n}, A_i\cap A_j=\Phi, i\neq j$.

Teorema 2. *Fie* $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_m\}$, $K=P(\Omega)$ *un câmp de evenimente şi* $\{n_1, n_2, ..., n_m\}$ *o familie de numere reale pozitive. Dacă definim o funcţie*

Scanned with CamScanner

$P:K\to\mathbb{R}$ *prin* $P(A)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p} n_{ik}$ *, unde* $A=\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},\ldots,\omega_{i_p}\}$ *şi* $n=n_1+n_2+\ldots+n_m$*, atunci P este o probabilitate pe K.*

Observaţia 1:

Pentru $n_1=n_2=\ldots=n_m$ obţinem $P(\omega_1)=P(\omega_2)=\ldots=P(\omega_m)=\frac{1}{m}$ şi $P(A)=\frac{p}{m}$, unde p este numărul de elemente ale lui A, adică definiţia clasică a probabilităţii evenimentului A:

> $P(A)$ este raportul dintre numărul de cazuri favorabile şi numărul de cazuri posibile egal probabile realizării evenimentului A.

Definiţia 3. Se numeşte ***probabilitate σ-aditivă*** (***complet aditivă***) pe câmpul borelian de evenimente (Ω,K) o funcţie $P:K\to R$ cu proprietăţile P1, P3 şi

P'2. $$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\right)=\sum_{n\in\mathbb{N}}P(A_n),\forall(A_n)\subset K, A_i\cap A_j=\Phi, i\neq j.$$

Definiţia 4. Un câmp borelian de evenimente (Ω,K) înzestrat cu o probabilitate σ-aditivă se numeşte ***câmp borelian de probabilitate*** şi se notează cu (Ω,K,P).

D. PROBABILITATE CONDIŢIONATĂ

Definiţia 1. Fie (Ω,K) un câmp borelian de evenimente şi H o submulţime nevidă a lui K. O funcţie de două variabile $P(\cdot,\cdot):K\times K\to\mathbb{R}$ se numeşte ***probabilitate condiţionată*** dacă:

PC1. $P(A|B)\geq 0, \forall A\in K, B\in H$;

PC2. $P(B|B)=1, \forall B\in H$;

PC3. $$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\,|\,B\right)=\sum_{n\in\mathbb{N}}P(A_n\,|\,B),$$

Scanned with CamScanner

$$\forall (A_n) \subset K, B \in H, A_i \cap A_j = \Phi, i \neq j$$

PC4. $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B \mid C)}{P(B \mid C)}, \forall A \in K, B, C \in H, B \subset C, P(B \mid C) > 0.$

Definiția 2. Tripletul $(\Omega, K, P(\cdot,\cdot))$ se numeşte ***câmp condiționat de probabilitate***, iar $P(A|B) \geq 0$ se numeşte ***probabilitatea evenimentului A condiționat de evenimentul*** B.

Teorema 1. *Probabilitatea condiționată are următoarele proprietăți:*

PC5. $P(A|B) = P(A \cap B|B), \forall A \in K, B \in H$;

PC6. $P(A|B) \leq P(A'|B), \forall A, A' \in K, B \in H, A \subset A'$;

PC7. $P(A \mid B \cap C)P(B \mid C) = P(A \cap B \mid C),$;

$\forall A, B \in K, C, B \cap C \in H$

PC8. $P(\Omega|B) = 1, \forall B \in H$;

PC9. $P(A|B) \leq 1, \forall A \in K, B \in H$;

PC10. $P(\Phi|B) = 0, \forall B \in H$;

PC11. $P(A|B) = 0$ *dacă* $A \cap B = \Phi$.

Teorema 2. *Fie* (Ω, K, P) *un câmp borelian de probabilitate,* $H = \{B \in K | P(B) > 0\}$ *şi* $P(\cdot,\cdot): K \times H \to \mathbb{R}$,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Atunci $P(\cdot \mid \cdot)$ *este o probabilitate condiționată, iar câmpul* $(\Omega, K, H, P(\cdot \mid \cdot))$ *se numeşte* ***câmp condiționat de probabilitate generat de*** (Ω, K, P).

Teorema 3. *Fie* $(\Omega, K, H, P(\cdot \mid \cdot))$ *un câmp condiționat de probabilitate şi* $C \in K$ *arbitrară. Atunci funcția* $P_C : K \to \mathbb{R}$ *definită prin* $P_C = P(A|C)$, *este o probabilitate pe* K, *iar* (Ω, K, P_C) *se*

Scanned with CamScanner

numeşte câmp borelian de probabilitate indus de $(\Omega, K, H, P(\cdot|\cdot))$.

Teorema 4. *Pentru orice* $A_1, A_2, \ldots, A_n \in K$ *cu* $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$ *avem*

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) =$$
$$= P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n | A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

Definiția 3. Numim ***sistem complet de evenimente*** o familie cel mult numărabilă de evenimente

$$(A_i), i \in I \text{ cu } A_i \cap A_j = \Phi, \forall i, j \in I, i \neq j \text{ şi } \bigcup_{i \in I} A_i = \Omega.$$

Formula probabilității totale

Fie $(A_i) \subset K, i \in I$ un sistem complet de evenimente cu $P(A_i) \neq 0, i \in I$. Pentru $A \in K$ avem:

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A_i) P(A|A_i).$$

Formula lui Bayes

Fie $(A_i) \subset K, i \in I$ un sistem complet de evenimente cu $P(A_i) \neq 0, i \in I$. Pentru $A \in K$ cu $P(A) \neq 0$ avem:

$$P(A_i|A) = \frac{P(A_i) P(A|A_i)}{\sum_{i \in I} P(A_i) P(A|A_i)}.$$

Inegalitatea lui Boole

Fie (Ω, K, P) un câmp borelian de probabilitate şi $(A_i) \subset K, i \in I$, o familie cel mult numărabilă de evenimente. Atunci:

$$P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \geq 1 - \sum_{i \in I} P(\overline{A}_i).$$

Scanned with CamScanner

Teorema 5. *Fie (Ω,K,P) un câmp borelian de probabilitate şi $A_n \subset K$ o familie numărabilă de evenimente. Atunci:*

1. *pentru* $A_{n+1} \subset A_n, \forall n$ *avem* $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}} A_n\right)$;

2. *pentru* $A_n \subset A_{n+1}, \forall n$ *avem* $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} A_n\right)$.

E. EVENIMENTE INDEPENDENTE

Definiţia 1. Fie (Ω,K,P) un câmp de probabilitate şi $A\in K$. Se numeşte ***partiţie*** a lui A o familie de evenimente $(A_i), i=\overline{1,n}$, incompatibile două câte două şi a căror reuniune este A.

Definiţia 2. Date fiind partiţiile $D_i = (A_i^j), i=\overline{1,n}, j=\overline{1,r_i}$, spunem că sunt ***independente k câte k*** dacă pentru orice şir $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$ şi orice $1 \le q_{i_j} \le r_{i_j}$ avem:

$$P(A_{i_1}^{q_{i_1}} \cap A_{i_2}^{q_{i_2}} \cap \ldots \cap A_{i_k}^{q_{i_k}}) = P(A_{i_1}^{q_{i_1}})P(A_{i_2}^{q_{i_2}})\cdot\ldots\cdot P(A_{i_k}^{q_{i_k}}).$$

Dacă $k=n$ se spune că partiţiile sunt ***independente în totalitate***.

Definiţia 3. Spunem că evenimentele $A_i \in K, i=\overline{1,n}$, sunt ***independente k câte k*** dacă partiţiile $D_i = (A_i, \overline{A}_i)$ sunt independente k câte k, adică pentru orice şir $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$ şi $B_{i_j} \in \{A_{i_j}, \overline{A}_{i_j}\}$ avem $P(B_{i_1} \cap B_{i_2} \cap \ldots \cap B_{i_k}) = P(B_{i_1})P(B_{i_2})\cdot\ldots\cdot P(B_{i_k})$.

Teorema 1. *Evenimentele $(A_i), i=\overline{1,n}$ sunt independente în totalitate dacă şi numai dacă pentru orice şir $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$ are loc*

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdot\ldots\cdot P(A_{i_k}).$$

Teorema 2. *Dacă evenimentele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sunt independente în totalitate, atunci sunt independente şi k câte k. Reciproca este falsă.*

Scanned with CamScanner

Exemplul lui Bernstein

Fie $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $K = P(\Omega)$, $P(\omega_i) = \frac{1}{4}, i = \overline{1,4}$,

$$\begin{cases} A = \{\omega_1, \omega_2\} \\ B = \{\omega_1, \omega_3\} \\ C = \{\omega_1, \omega_4\} \end{cases}.$$

Atunci

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2},$$

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(\omega_1) = \frac{1}{4}.$$

Se observă că $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, $P(A \cap C) = P(A)P(C)$, $P(B \cap C) = P(B)P(C)$, adică *A*, *B*, *C* sunt independente două câte două. În schimb, $P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C) \left(\frac{1}{4} \neq \frac{1}{8}\right)$, adică *A*, *B*, *C* nu sunt independente în totalitate.

F. SCHEME CLASICE DE PROBABILITATE

1. Schema lui Poisson

Fie n urne $U_1, U_2, \ldots, U_n$ care conţin bile albe şi negre în proporţii oarecare. Presupunem că probabilitatea de a extrage o bilă albă din urna U_i este p_i, iar probabilitatea de a extrage o bilă neagră este $q_i = 1 - p_i$. Se extrage câte o bilă din fiecare urnă, independent. Atunci probabilitatea ca din cele n bile extrase k să fie albe, $0 \leq k \leq n$, este coeficientul lui x^k din polinomul $(p_1 x + q_1)(p_2 x + q_2)\ldots(p_n x + q_n)$.

2. Schema lui Bernoulli (binomială)

Fie o urnă cu bile albe şi negre astfel ca probabilitatea extragerii unei bile albe să fie p, iar a unei bile negre $q = 1 - p$. Se fac n extrageri a câte o bilă, punându-se după fiecare extragere bila obţinută înapoi în urnă.

Scanned with CamScanner

Atunci probabilitatea ca din cele n bile extrase, k să fie albe şi implicit n-k negre, este $P(n,k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

3. Schema lui Bernoulli pentru mai multe culori

Fie o urnă cu bile de m culori $C_1, C_2, \ldots, C_m$. Presupunem că probabilitatea extragerii unei bile de culoare C_i este p_i, $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1$. Se fac n extrageri a câte o bilă, punând înapoi bila obţinută de fiecare dată. Atunci probabilitatea ca din cele n bile extrase k_i să fie de culoare C_i, $i = \overline{1,m}$, este

$$P(n; k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_m!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_m^{k_m}$$

unde $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$.

4. Schema hipergeometrică

Fie o urnă cu N bile de două culori, N_1 albe şi $N_2 = N - N_1$ negre. Se fac n extrageri ($n \leq N$) a câte o bilă fără a repune bila obţinută înapoi în urnă (sau o extragere a n bile). Atunci probabilitatea ca din cele n bile extrase k_1 să fie albe şi $k_2 = n - k_1$ să fie negre este $P(n; k_1, k_2) = \dfrac{C_{N_1}^{k_1} \cdot C_{N_2}^{k_2}}{C_N^n}$.

5. Schema hipergeometrică cu mai multe culori

Fie o urnă cu bile de m culori: N_i de culoare C_i, $i = \overline{1,m}$, în total fiind $N = N_1 + N_2 + \ldots + N_m$ bile. Se fac n extrageri ($n \leq N$) a câte o bilă fără a repune bila obţinută înapoi în urnă (sau o extragere a n bile). Atunci probabilitatea ca din cele n bile extrase k_i să fie de culoarea C_i, $i = \overline{1,m}$, este $P(n; k_1, k_2, \ldots, k_m) = \dfrac{C_{N_1}^{k_1} C_{N_2}^{k_2} \cdot \ldots \cdot C_{N_m}^{k_m}}{C_N^n}$ unde $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$.

6. Schema geometrică

Fie o urnă cu bile albe şi negre astfel ca probabilitatea extragerii unei bile albe să fie p, iar a unei bile negre $q = 1 - p$. Atunci probabilitatea ca

Scanned with CamScanner

din n extrageri consecutive a câte o bilă, punând de fiecare dată bila extrasă înapoi în urnă, să obținem o bilă albă la ultima extragere și n-1 negre la primele n-1 extrageri, este $p_n=pq^{n-1}$.

12.2. Exerciții rezolvate

1. *Se aruncă un zar obișnuit și se notează cu:*

A - evenimentul apariției unui număr impar;

B - evenimentul apariției unui număr divizibil cu trei;

C - evenimentul apariției unui număr mai mare ca patru;

D - evenimentul apariției unui număr divizibil cu șapte;

E - evenimentul apariției unui număr mai mic ca șapte.

a. *Să se scrie sub formă de mulțimi cele cinci evenimente.*

b. *Să se scrie și să se spună ce înseamnă evenimentele*

$\overline{A}, \overline{B}, A \cap B, B \cap C, A \cup D, B \cup C, A \setminus E, C \setminus A,$

$A \cup (B \cap C), B \cap (C \cup A)$.

Rezolvare:

a. La aruncarea unui zar obișnuit cu șase fețe, perfect regulat și omogen, este posibil să apară oricare dintre fețele lui numerotate de la 1 la 6. Așadar mulțimea cazurilor posibile este $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$. Fiecărui eveniment îi corespunde o mulțime de cazuri favorabile, care este o submulțime a lui Ω. Astfel:

- evenimentului A îi corespunde submulțimea $\{1,3,5\}$;
- evenimentului B îi corespunde submulțimea $\{3,6\}$;
- evenimentului C îi corespunde submulțimea $\{5,6\}$;
- evenimentului D îi corespunde submulțimea vidă Φ;
- evenimentului E îi corespunde submulțimea Ω.

Se observă că un eveniment oarecare și submulțimea lui E asociată, se determină reciproc și de aceea nu vom face distincție între ele. Astfel vom scrie:

$A=\{1,3,5\}$, $B=\{3,6\}$, $C=\{5,6\}$, $D=\Phi$, $E=\Omega$.

D este un exemplu de eveniment imposibil (nu se realizează în nici o probă), iar E de eveniment sigur (se realizează la orice probă).

Scanned with CamScanner

b. $\overline{A} = \Omega \setminus A = \{1,2,3,4,5,6\} \setminus \{1,3,5\} = \{2,4,6\}$ semnifică apariţia unui număr par (neimpar).

$\overline{B} = \Omega \setminus B = \{1,2,4,5\}$ semnifică apariţia unui număr nedivizibil cu 3.

$A \cap B = \{1,3,5\} \cap \{3,6\} = \{3\}$ semnifică apariţia unui număr impar şi divizibil cu 3.

$B \cap C = \{3,6\} \cap \{5,6\} = \{6\}$ semnifică apariţia unui număr mai mare decât 4 şi divizibil cu 3.

Evenimentele $A \cap B$ şi $B \cap C$ sunt evenimente imcompatibile deoarece $(A \cap B) \cap (B \cap C) = \{3\} \cap \{6\} = \Phi$.

Avem de asemenea:

$A \cup D = \{1,3,5\} \cup \Phi = \{1,3,5\} = A$ - evenimentul apariţiei unui număr impar sau a unui număr divizibil cu 7, fiind echivalent cu A.

$B \cup C = \{3,6\} \cup \{5,6\} = \{3,5,6\}$ - evenimentul apariţiei unui număr divizibil cu 3 sau mai mare decât 4.

$A \setminus E = \{1,3,5\} \setminus \{1,2,3,4,5,6\} = \Phi$ - evenimentul apariţiei unui număr impar, dar nu mai mic decât 7, fiind echivalent cu evenimentul imposibil.

$C \setminus A = \{5,6\} \setminus \{1,3,5\} = \{6\}$ - evenimentul apariţiei unui număr mai mare ca 4 şi neimpar, fiind echivalent cu evenimentul elementar ce constă în apariţia feţei 6.

$A \cup (B \cap C) = \{1,3,5\} \cup \{6\} = \{1,3,5,6\}$ - evenimentul apariţiei unui număr impar sau a unui număr divizibil cu 3 şi mai mare decât 4.

$B \cap (C \cup A) = \{3,6\} \cap \{1,3,5,6\} = \{3,6\}$ - evenimentul apariţiei unui număr divizibil cu 3 şi fie mai mare decât 4, fie impar, fiind echivalent cu B.

2. *Se aruncă două zaruri obişnuite şi se notează punctele obţinute pe fiecare.*

a. *Câte perechi de numere putem întâlni la o astfel de aruncare?*

b. *Scrieţi perechile de numere ce pot apare şi în care suma numerelor de pe cele două zaruri este un număr prim.*

c. *Scrieţi perechile de numere ce pot apare şi în care primul număr este impar şi mai mare decât al doilea.*

Scanned with CamScanner

d. *Scrieți perechile de numere ce pot apare și în care suma este divizibilă cu 3, iar produsul este mai mare decât 10.*

Rezolvare:

a. Deoarece pe fiecare zar avem 6 cazuri posibile, vom avea 36 de combinații (perechi) între cele două numere: (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1),..., (2,6),..., (6,6).

b. Cum suma celor două numere este cuprisă între 2 și 12 și este un număr prim, rezultă că poate lua valorile 2, 3, 5, 7 și 11. Perechile corespunzătoare sunt: (1,1), (1,2), (2,1), (1,4), (2,3), (3,2), (4,1), (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1), (5,6), (6,5).

c. Primul număr poate fi 1, 3 sau 5. Cum al doilea este mai mic și cuprins între 1 și 6 obținem perechile: (3,1), (3,2), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4).

d. Suma fiind divizibilă cu 3, poate lua valorile 3, 6, 9 și 12. Pentru primele două valori, produsul nu poate depăși 10 ($2\cdot4=8$, $3\cdot3=9$). Rămân ultimele două valori și obținem perechile: (3,6), (4,5), (5,4), (6,3), (6,6).

3. *Un student solicită o bursă de studii la 3 universități. După trimiterea actelor necesare, acesta poate obține bursă de la universitatea i (U_i) sau nu* $(\overline{U}_i), 1 \le i \le 3$. *Scrieți evenimentele ce corespund următoarelor situații:*

a. *primește o bursă;*

b. *primește cel mult o bursă;*

c. *primește cel puțin o bursă;*

d. *primește cel puțin două burse.*

Rezolvare:

a. Bursa primită poate fi de la prima universitate, caz în care celelalte nu-i acordă bursă, sau de la a doua, caz în care prima și a treia nu-i acordă bursă, sau de la a treia, caz în care primele două nu-i acordă bursă. Avem astfel evenimentul $A = (U_1 \cap \overline{U}_2 \cap \overline{U}_3) \cup (\overline{U}_1 \cap U_2 \cap \overline{U}_3) \cup (\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2 \cap U_3)$.

b. Avem două variante: studentul nu primește nici o bursă sau studentul primește o bursă. Obținem evenimentul $B = (\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2 \cap \overline{U}_3) \cup A$.

Scanned with CamScanner

c. Evenimentul poate fi scris ca reuniunea a trei evenimente: studentul primeşte o bursă, două burse, trei burse. Astfel $C = A \cup E \cup F$, unde

$$E = (U_1 \cup U_2 \cap \overline{U}_3) \cup (\overline{U}_1 \cap U_2 \cap U_3) \cup (U_1 \cap \overline{U}_2 \cap U_3),$$

iar

$$F = U_1 \cap U_2 \cap U_3 .$$

d. Avem $D = E \cup F$. Altfel, evenimentul D este contrar evenimentului B, deci $D = \overline{B} = \overline{(\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2 \cap \overline{U}_3) \cup A}$.

4. *La un concurs studenţesc un student ales la întâmplare poate obţine un număr de puncte între 1 şi 7. Ştiind că echipele de concurs sunt formate din doi studenţi, să se determine probabilitatea ca:*

a. *Punctajul total al unei echipe să fie:*

1. *un număr divizibil cu 3;*
2. *un pătrat perfect;*
3. *un număr multiplu de 4 şi divizor al lui 16;*
4. *un număr prim cu 12 şi mai mare decât 8.*

b. *Punctajul primului student din echipă să fie mai mare decât dublul punctajului celuilalt student.*

c. *Diferenţa între punctajele membrilor echipei să fie cel mult 1 (echipă cât mai omogenă).*

Rezolvare:

Avem 7·7=49 de cazuri posibile, adică numărul de perechi de numere cuprinse între 1 şi 7.

a. Punctajul total este un număr cuprins între 2(1+1) şi 14(7+7). Multiplii lui 3 cuprinşi între 2 şi 14 sunt 3, 6, 9 şi 12. Obţinem corespunzător acestor sume perechile: (1,2), (2,1), (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1), (2,7), (3,6), (4,5), (5,4), (6,3), (7,2), (5,7), (6,6), (7,5). Avem la punctul 1) 16 cazuri favorabile, deci probabilitatea cerută este $p_1 = \frac{16}{49}$. Pătratele perfecte cuprinse între 2 şi 14 sunt 4 şi 9. Corespunzător avem perechile: (1,3), (2,2), (3,1), (2,7), (3,6), (4,5), (5,4), (6,3), (7,2) adică 9 cazuri favorabile. Probabilitatea cerută este $p_2 = \frac{9}{49}$. La punctul 3) sumele ce corespund cerinţelor sunt 4 şi 8. Obţinem perechile:

Scanned with CamScanner

(1,3), (2,2), (3,1), (1,7), (2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2), (7,1), adică 10 cazuri favorabile, ceea ce ne conduce la $p_3 = \frac{10}{49}$. Sumele prime cu 12 sunt 5, 7 şi 11. Singura mai mare ca 8 este 11. Obţinem perechile: (4,7), (5,6), (6,5), (7,4), de unde $p_4 = \frac{4}{49}$.

b. Dacă punctajul celui de-al doilea student y este 1, punctajul primului x este cel puţin 3, dacă y=2, atunci $x \geq 5$, dacă y=3 atunci x=7. Obţinem perechile: (3,1), (4,1), (5,1), (6,1), (7,1), (5,2), (6,2), (7,2), (7,3). Probabilitatea cerută este $p = \frac{9}{49}$.

c. Cazurile favorabile sunt: (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (7,7), (1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (3,4), (4,3), (4,5), (5,4), (5,6), (6,5), (6,7), (7,6). Astfel $p = \frac{19}{49}$.

5. *Într-un grup de studenţi aflaţi în excursie se găsesc 6 fete şi 9 băieţi. Se aleg la întâmplare doi studenţi pentru a cerceta traseul. Care este probabilitatea ca cei doi să fie:*

a. *băieţi;*

b. *fete;*

c. *un băiat şi o fată;*

d. *cel puţin un băiat;*

e. *primul băiat şi a doua fată;*

f. *de acelaşi sex.*

Rezolvare:

Notăm cu A_1 şi A_2 evenimentele alegerii unui băiat la prima, respectiv a doua alegere. La primul punct avem de calculat probabilitatea $P(A_1 \cap A_2)$. Întrucât a doua alegere depinde de prima avem:

Scanned with CamScanner

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) = \frac{9}{15} \cdot \frac{8}{14} = \frac{12}{35},$$

deoarece alegând un băiat mai rămân în grup 14 studenți între care 8 băieți. Evenimentul de la punctul b) se scrie astfel: $B = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2$. Deci

$$P(B) = P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1) = \frac{6}{15} \cdot \frac{5}{14} = \frac{1}{7}.$$

Evenimentul de la punctul c) este $C = (A_1 \cap \overline{A}_2) \cup (A_2 \cap \overline{A}_1)$ așadar $P(C) = P(A_1 \cap \overline{A}_2) + P(A_2 \cap \overline{A}_1)$ ($A_1 \cap \overline{A}_2, A_2 \cap \overline{A}_1$ sunt incompatibile). Dar

$$P(A_1 \cap \overline{A}_2) = P(A_1)P(\overline{A}_2|A_1) = \frac{9}{15} \cdot \frac{6}{14},$$

iar

$$P(A_2 \cap \overline{A}_1) = P(\overline{A}_1)P(A_2|\overline{A}_1) = \frac{6}{15} \cdot \frac{9}{14}$$

de unde

$$P(C) = 2 \cdot \frac{9}{15} \cdot \frac{6}{14} = \frac{18}{35}.$$

Am obținut și probabilitatea evenimentului de la punctul e) $P(A_1 \cap \overline{A}_2)$. Evenimentul de la punctul d) se exprimă astfel: $D = A_1 \cup A_2$. El este contrar evenimentului $B = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2$, prin urmare $P(D) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$. Evenimentul de la ultimul punct f) este $F = (A_1 \cap A_2) \cup (\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2)$. Cum $(A_1 \cap A_2) \cup (\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2) = \Phi$ cele două evenimente sunt incompatibile și deci

$$P(F) = P(A_1 \cap A_2) + P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2) = \frac{12}{35} + \frac{1}{7} = \frac{17}{35}.$$

6. *La un examen de licență participă mai mulți absolvenți, între care numai trei din străinătate. Probabilitatea ca primul student să promoveze este 3/4, probabilitatea ca al doilea să promoveze este 4/5, iar pentru al treilea 5/6. Să se determine probabilitățile ca:*

a. *toți cei trei studenți străini să promoveze;*

b. *cel puțin unul să promoveze examenul.*

Scanned with CamScanner

Rezolvare:

Fie A_i evenimentul promovării examenului de către studentul i, $i=\overline{1,3}$. Evenimentul de la punctul a) este $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$, iar de la punctul b) este $B = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Evenimentele A_i sunt independente (rezultatele celor 3 studenți nedepinzând unul de celelalte), deci

$$P(A) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6} = \frac{1}{2}.$$

Folosind proprietățile probabilității avem:

$$P(B) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1 \cup A_2) + P(A_3) - P((A_1 \cup A_2) \cap A_3) =$$

$$= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) + P(A_3) - P((A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)) =$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - [P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3) -$$
$$- P((A_1 \cap A_3) \cap P(A_2 \cap A_3))] =$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) +$$
$$+ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Ținând seama de independența evenimentelor A_i, $i = \overline{1,3}$, avem:

$$P(B) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1)P(A_2) -$$
$$- P(A_1)P(A_3) - P(A_2)P(A_3) + P(A_1)P(A_2)P(A_3) =$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} - \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5} - \frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6} - \frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6} + \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6} =$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} - \frac{3}{5} - \frac{5}{8} - \frac{4}{6} + \frac{3}{6} = \frac{1}{8} + \frac{1}{5} + \frac{2}{3} = \frac{119}{120}.$$

7. *Într-un cămin de studenți s-a constatat că 85% dintre ei sunt studenți la A.S.E., 80% vorbesc bine o limbă străină și 75% au cunoștințe avansate de informatică. Alegând la întâmplare un student din acest cămin, cu ce probabilitate minimă acesta ar fi:*

   a. *student la A.S.E. care vorbește bine o limbă străină și are cunoștințe avansate de informatică;*

   b. *student la A.S.E. care vorbește bine o limbă străină, dar nu are cunoștințe avansate de informatică;*

Scanned with CamScanner

c. *student la A.S.E. care are cunoştinţe avansate de informatică, dar nu vorbeşte bine o limbă străină.*

Rezolvare:

Notăm cu A_1, A_2, A_3 evenimentele de a fi student la A.S.E., de a vorbi bine o limbă străină şi de a avea cunoştinţe avansate de informatică. Avem $P(A_1) = 0{,}85$; $P(A_2) = 0{,}80$; $P(A_3) = 0{,}75$. Potrivit inegalităţii lui Boole, probabilitatea cerută la punctul a) este:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \geq 1 - [P(\overline{A}_1) + P(\overline{A}_2) + P(\overline{A}_3)] =$$

$$= 1 - [1 - P(A_1) + 1 - P(A_2) + 1 - P(A_3)] =$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - 2 = 0{,}40 .$$

Pentru punctul b) avem:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3) \geq P(A_1) + P(A_2) + P(\overline{A}_3) - 2 = -0{,}10 ,$$

ceea ce ne spune că în acest caz inegalitatea lui Boole nu prezintă interes, orice probabilitate fiind pozitivă. La fel se întâmplă şi la punctul c) unde

$$P(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) \geq P(A_1) + P(\overline{A}_2) + P(A_3) - 2 = -0{,}20 .$$

8. *Din mai multe controale asupra activităţilor a trei magazine se apreciază că în proporţie de 90%, 80%, 70%, cele trei magazine au declarat marfa vândută. La un nou control, comisia de control solicită 50 de documente privind activitatea comercială: 20 de la primul magazin, 15 de la al doilea, 15 de la al treilea. Dintre acestea se alege unul la întâmplare pentru a fi verificat:*

a. *Cu ce probabilitate documentul ales este corect (înregistrat)?*

b. *Constatând că este corect, cu ce probabilitate el aparţine primului magazin?*

Rezolvare:

a. Notăm cu A_1, A_2, A_3 evenimentul ca documentul controlat să provină de la primul, al doilea şi respectiv al treilea magazin. Avem astfel

$$P(A_1) = \frac{20}{50};\ P(A_2) = \frac{15}{50};\ P(A_3) = \frac{15}{50} .$$

Scanned with CamScanner

Fie A evenimentul ca documentul controlat să fie corect. Atunci $A|A_1, A|A_2, A|A_3$ reprezintă evenimentul ca documentul controlat să fie corect ştiind că el provine de la primul, al doilea, al treilea magazin. Prin urmare: $P(A|A_1) = 0{,}90; P(A|A_2) = 0{,}80; P(A|A_3) = 0{,}70$. Cum $\{A_1, A_2, A_3\}$ este un sistem complet de evenimente

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega,\ A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = A_2 \cap A_3 = \Phi$$

aplicând formula probabilității totale avem:

$$P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + P(A_2)P(A|A_2) + P(A_3)P(A|A_3) =$$
$$= \frac{20}{50} \cdot 0{,}90 + \frac{15}{50} \cdot 0{,}80 + \frac{15}{50} \cdot 0{,}70 = 0{,}81.$$

b. Aplicând formula lui Bayes avem:

$$P(A_1|A) = \frac{P(A_1)P(A|A_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(A|A_i)} = \frac{\frac{20}{50} \cdot 0{,}90}{0{,}81} = \frac{0{,}36}{0{,}81} = \frac{4}{9}.$$

($A_1|A$ reprezintă evenimentul ca documentul controlat să provină de la primul magazin ştiind că a fost corect).

9. *La un supermarket s-a făcut un sondaj printre clienții acestuia, punându-li-se trei întrebări la care să răspundă prin DA sau NU. S-a constatat că răspunsul DA la prima, a doua respectiv a treia întrebare a fost de 60%, 80% respectiv 70%. Care este probabilitatea ca un client să dea:*

a. *trei răspunsuri DA?*

b. *trei răspunsuri NU?*

c. *două răspunsuri DA şi unul NU?*

d. *cel mult două răspunsuri DA?*

e. *primele două răspunsuri NU?*

f. *primul răspuns DA şi încă unul DA?*

Scanned with CamScanner

Rezolvare:

a. Suntem în condițiile schemei lui Poisson (presupunând că răspunsurile sunt independente unul de celălalt) cu 3 urne şi cu probabilitățile: $p_1 = 0,6; q_1 = 0,4; p_2 = 0,8; q_2 = 0,2; p_3 = 0,7; q_3 = 0,3$. Astfel probabilitatea ca să avem 3 răspunsuri DA este coeficientul lui x^3 din polinomul

$$(p_1x + q_1)(p_2x + q_2)(p_3x + q_3)$$

adică

$$p_a = p_1p_2p_3 = 0,6 \cdot 0,8 \cdot 0,7 = 0,336 .$$

b. Probabilitatea să avem trei răspunsuri NU este coeficientul lui x^0 (termenul liber) din polinomul de mai sus, adică $q_1q_2q_3 = 0,4 \cdot 0,2 \cdot 0,3 = 0,024$.

c. În acest caz probabilitatea este coeficientul lui x^2 din acelaşi polinom, adică

$$p_1p_2q_3 + p_1q_2p_3 + q_1p_2p_3 = \\ = 0,6 \cdot 0,8 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,2 \cdot 0,7 + 0,4 \cdot 0,8 \cdot 0,7 = 0,452 .$$

d. Evenimentul dat este reuniunea a trei evenimente incompatibile două câte două, respectiv de a da 0, 1, 2 răspunsuri DA, deci probabilitatea sa este suma coeficienților lui x^0, x^1 şi x^2 din polinomul de la punctul a). Avem

$$p_d = q_1q_2q_3 + (p_1q_2q_3 + q_1p_2q_3 + q_1q_2p_3) + \\ + (p_1p_2q_3 + p_1q_2p_3 + q_1p_2p_3) = \\ = 0,024 + 0,188 + 0,452 = 0,664 .$$

Altfel, evenimentul nostru este contrar evenimentului de la punctul a), deci $p_d = 1 - p_a = 1 - 0,336 = 0,664$.

e. Putem reduce schema lui Poisson la 2 urne cu probabilitățile: $p_1 = 0,6; q_1 = 0,4; p_2 = 0,8; q_2 = 0,2$. Probabilitatea cerută este coeficientul lui x^0 din polinomul $(p_1x + q_1)(p_2x + q_2)$, adică $q_1q_2 = 0,08$. Altfel, evenimentul dat este intersecția a două evenimente independente cu probabilitățile q_1, respectiv q_2, de unde probabilitatea cerută este produsul q_1q_2.

f. Evenimentul este reuniunea evenimentelor "numai primul şi al doilea răspuns DA" şi "numai primul şi al treilea răspuns DA", care sunt

Scanned with CamScanner

incompatibile, deci probabilitatea evenimentului dat este suma probabilităților celor două, adică $p_f = p_1p_2q_3 + p_1q_2p_3 = 0{,}228$.

10. *La o bancă s-a constatat că din 100 de credite acordate, 10 sunt neperformante. Dacă se acordă 5 credite, care este probabilitatea ca:*

a. *toate să fie neperformante?*

b. *toate să fie performante?*

c. *numai 4 să fie performante?*

d. *cel puțin 4 să fie performante?*

Rezolvare:

Suntem în condițiile schemei lui Bernoulli cu două culori, unde $p = \frac{100-10}{100} = 0{,}9$ și q=1-p=0,1 considerând bile albe creditele performante, iar bile negre cele neperformante. Vom obține astfel:

a. $P(5;0) = C_5^0(0{,}9)^0 \cdot (0{,}1)^5 = 0{,}00001$;

b. $P(5;5) = C_5^5(0{,}9)^5 \cdot (0{,}1)^0 = 0{,}59049$;

c. $P(5;4) = C_5^4(0{,}9)^4 \cdot (0{,}1)^1 = 0{,}32705$;

d. $P(5;\geq 4) = P(5;4) + P(5;5) = 0{,}91754$.

11. *O întreprindere realizează o anumită marcă de aparate electrocasnice. S-a constatat că acestea au o durată lungă de funcționare în proporție de 60%, medie în proporție de 30% și scurtă în proporție de 10%. Care este probabilitatea ca o comandă de 10 aparate să conțină:*

a. *numai aparate cu durată lungă de funcționare?*

b. *5 aparate cu durată lungă și 5 cu durată medie de funcționare?*

c. *cel mult un aparat cu durată scurtă de funcționare?*

Rezolvare:

Suntem în condițiile schemei lui Bernoulli cu 3 culori cu probabilitățile $p_1 = 0{,}6$, $p_2 = 0{,}3$, $p_3 = 0{,}1$ și n=10. Astfel vom avea:

Scanned with CamScanner

a. $P_a = P(10;10,0,0) = \frac{10!}{10!0!0!}(0{,}6)^{10} \cdot (0{,}3)^0 \cdot (0{,}1)^0 = (0{,}6)^{10}$;

b. $P_b = P(10;5,5,0) = \frac{10!}{5!5!0!}(0{,}6)^5 \cdot (0{,}3)^5 \cdot (0{,}1)^0$;

c. Putem considera aparatele cu lungă durată sau medie de funcționare ca fiind o singură categorie și suntem în condițiile schemei lui Benoulli cu două culori, unde $p = p_1 + p_2 = 0{,}9$, $q = 0{,}1$, $n = 10$ și k=10 sau 9. Astfel:

$$P_c = P(10;10) + P(10;9) = C_{10}^{10} p^{10} q^0 + C_{10}^9 p^9 q^1 =$$
$$= (0{,}9)^{10} + 10 \cdot (0{,}9)^9 \cdot (0{,}1) = 1{,}9 \cdot (0{,}9)^9 .$$

12. *Într-un partid parlamentar sunt 10 deputați și 5 senatori. Se ia la întâmplare un grup de 5 parlamentari ai partidului respectiv, pentru a forma o comisie. Cu ce probabilitate grupul conține:*

a. *3 deputați și 2 senatori*;

b. *numai deputați*;

c. *numai senatori*;

d. *cel mult 2 senatori*;

e. *cel puțin un deputat.*

Rezolvare:

Suntem în condițiile schemei hipergeometrice cu 2 culori, unde N_1=10, N_2=5, n=5. Vom avea:

a. $P(5;3,2) = \frac{C_{10}^3 \cdot C_5^2}{C_{15}^5}$;

b. $P(5;5,0) = \frac{C_{10}^5 \cdot C_5^0}{C_{15}^5}$;

c. $P(5;0,5) = \frac{C_{10}^0 \cdot C_5^5}{C_{15}^5}$;

Scanned with CamScanner

d. $P_d = P(5;5,0) + P(5;4,1) + P(5;3,2) = \dfrac{C_{10}^5 \cdot C_5^0 + C_{10}^4 \cdot C_5^1 + C_{10}^3 \cdot C_5^2}{C_{15}^5}$;

e. $P_e = \sum_{i=1}^{5} P(5;i,5-i) = \sum_{i=1}^{5} \dfrac{C_{10}^i \cdot C_5^{5-i}}{C_{15}^5}$

sau altfel

$$P_e = 1 - P(5;0,5) = 1 - \frac{1}{C_{15}^5}.$$

13. *Trei firme particulare A, B, C oferă respectiv câte 10, 8 şi 12 burse de studii, dintre care 6 facultăţii de comerţ. Acestea sunt alese la întâmplare din cele 30 de burse. Care este probabilitatea ca cele 6 burse să provină:*

a. *2 de la firma A, 1 de la B, şi 3 de la C?*

b. *toate de la firma A?*

c. *toate de la aceeaşi firmă?*

d. *cel puţin câte una de la fiecare firmă?*

Rezolvare:

Suntem în condiţiile schemei hipergeometrice cu 3 culori, unde N_1=10, N_2=8, N_3=12, n=5. Avem:

a. $P(6;2,1,3) = \dfrac{C_{10}^2 \cdot C_8^1 \cdot C_{12}^3}{C_{30}^6}$;

b. $P(6;6,0,0) = \dfrac{C_{10}^6 \cdot C_8^0 \cdot C_{12}^0}{C_{30}^6}$;

c. $P_c = P(6;6,0,0) + P(6;0,6,0) + P(6;0,0,6) =$

$$= \frac{C_{10}^6 \cdot C_8^0 \cdot C_{12}^0 + C_{10}^0 \cdot C_8^6 \cdot C_{12}^0 + C_{12}^0 \cdot C_8^0 \cdot C_{12}^6}{C_{30}^6} =$$

$$= \frac{C_{10}^6 + C_8^6 + C_{12}^6}{C_{30}^6};$$

Scanned with CamScanner

d. $$P_d = \sum_{\substack{i+j+k=6 \\ 1\le i,j,k}} P(6;i,j,k) = \sum_{\substack{i+j+k=6 \\ 1\le i,j,k}} \frac{C_{10}^i \cdot C_8^j \cdot C_{12}^k}{C_{30}^6}$$

Altfel

$$P_d = 1 - \sum_{i=1}^{5} P(6;i,6-i,0) - \sum_{i=1}^{5} P(6;i,0,6-i) - \sum_{i=1}^{5} P(6;0,i,6-i) -$$
$$-P(6;6,0,0) - P(6;0,0,6) - P(6;0,6,0) =$$

$$= 1 - P_c - \sum_{i=1}^{5} \frac{C_{10}^i \cdot C_8^{6-i} + C_{10}^i \cdot C_{12}^{6-i} + C_8^i \cdot C_{12}^{6-i}}{C_{30}^6}.$$

14. *Probabilitatea ca un agent comercial să vândă un anumit produs este 0,3. Dacă acesta oferă produsul spre vânzare pe rând la 4 magazine cu ce probabilitate el vinde produsul:*

a. *la primul magazin;*

b. *la al doilea magazin;*

c. *la ultimul magazin;*

d. *cel mult la al treilea magazin.*

Rezolvare:

Suntem în condițiile schemei geometrice cu p=0,3 (se presupune că agentul poate vinde produsul unui singur magazin). Prin urmare avem:

a. $P_1 = pq^{1-1} = 0{,}3$;

b. $P_2 = pq^{2-1} = pq = 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}21$;

c. $P_4 = pq^{4-1} = pq^3 = 0{,}3 \cdot (0{,}7)^3 = 0{,}1029$;

d. $$P_d = P_1 + P_2 + P_3 = p + pq + pq^2 = p(1+q+q^2) =$$
$$= 0{,}3 \cdot (1 + 0{,}7 + 0{,}49) = 0{,}657\,.$$

15. *La un control de calitate se aleg 4 produse de același tip pentru a fi cercetate. Se știe că în medie de 10% produsele au defecțiuni. Dacă cel puțin două produse au defecțiuni, lotul se respinge, iar dacă numai unul*

Scanned with CamScanner

are defecţiuni el se respinge cu probabilitatea 0,2. Se cere probabilitatea ca:

a. *lotul să fie respins;*

b. *ştiind că lotul a fost respins, care este probabilitatea ca el să fi avut două produse cu defecţiuni?*

Rezolvare:

a. Fie A_i evenimentul existenţei a i piese cu defecţiuni în lotul controlat, $0 \le i \le 4$. Evident (A_i) formează un sistem complet de evenimente (fiind incompatibile două câte două şi având ca reuniune evenimentul sigur). Fie A evenimentul respingerii lotului.

Aplicăm formula probabilităţii totale:

$$P(A) = \sum_{i=0}^{4} P(A_i) P(A|A_i)$$

unde $A|A_i$ reprezintă evenimentul ca lotul să fie respins dacă i piese au defecţiuni. Din ipoteza problemei rezultă că:

$$P(A|A_0) = 0;\ P(A|A_1) = 0{,}2;\ P(A|A_2) = P(A|A_3) = P(A|A_4) = 1 .$$

Tot din această ipoteză avem că probabilitatea ca o piesă să fie defectă este 0,10. Aplicând schema lui Bernoulli pentru două culori cu p=0,10, n=4, obţinem: $P(A_i) = C_4^i p^i q^{4-i} = C_4^i (0{,}10)^i \cdot (0{,}90)^{4-i}$. Prin urmare

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_0)P(A \mid A_0) + P(A_1)P(A \mid A_1) + P(A_2)P(A \mid A_2) + \\ &\quad + P(A_3)P(A \mid A_3) + P(A_4)P(A \mid A_4) = \\ &= C_4^1 0{,}1 \cdot (0{,}9)^3 \cdot 0{,}2 + C_4^2 (0{,}1)^2 \cdot (0{,}9)^2 + \\ &\quad + C_4^3 (0{,}1)^3 \cdot 0{,}9 + C_4^4 (0{,}1)^4 = 0{,}11062 \end{aligned}$$

Aplicând aceeaşi formulă pentru $\overline{A}$ avem $P(\overline{A}) = \sum_{i=0}^{4} P(A_i) P(\overline{A}|A_i)$.

Dar $P(\overline{A}|A_0) = 1,\ P(\overline{A}|A_1) = 0{,}8,\ P(\overline{A}|A_2) = P(\overline{A}|A_3) = P(\overline{A}|A_4) = 0$,

deci

$$\begin{aligned} P(\overline{A}) &= P(A_0)P(\overline{A} \mid A_0) + P(A_1)P(\overline{A} \mid A_1) = \\ &= (0{,}9)^4 + C_4^1 \cdot (0{,}9)^3 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}8 = 0{,}88938, \end{aligned}$$

apoi

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 0{,}11062 .$$

Scanned with CamScanner

b. Aplicăm formula lui Bayes

$$P(A_2 \mid A) = \frac{P(A_2)P(A \mid A_2)}{P(A)} = \frac{C_4^2(0,1)^2 \cdot (0,9)^2}{0,11062} \cong 0,44 .$$

12.3. Exerciții propuse

1. *Se aruncă două zaruri obişnuite şi se notează cu S suma şi P produsul numerelor de pe cele două zaruri şi cu:*

A = *evenimentul ca suma să fie multiplu de 5;*

B = *evenimentul ca suma să fie număr prim;*

C = *evenimentul ca suma să fie cub perfect;*

D = *evenimentul ca produsul să fie pătrat perfect;*

E = *evenimentul ca produsul să fie mai mic decât suma.*

a. *Să se scrie mulţimile valorilor lui S şi P;*

b. *Să se scrie evenimentele A, B, C, D, E ca mulţimi;*

c. *Să se scrie următoarele evenimente ca mulţimi şi să se spună semnificaţia lor:*

$$\overline{A}, \overline{C}, \overline{E}, A \cap B, C \cap D, B \cup E, C \cup E, A \setminus B, D \setminus E,$$
$$A \cap B \cap D, A \cap (B \setminus C), (A \setminus C) \cup (B \setminus E), (\overline{A} \setminus B) \cap (\overline{C} \setminus D).$$

2. *Într-o grupă de studenţi sunt 15 fete şi 9 băieţi. Aceştia sunt numerotaţi într-un catalog de la 1 la 24. Se aleg trei numere la întâmplare. Să se scrie evenimentele care corespund situaţiilor următoare:*

a. *cele 3 numere corespund fetelor;*

b. *cele 3 numere corespund băieţilor;*

c. *cele 3 numere corespund la 2 băieţi şi o fată.*

3. *Un om de afaceri încheie într-o zi patru afaceri care pot fi rentabile* (A_i) *sau nerentabile* $(\overline{A}_i), 1 \le i \le 4$, *după o perioadă de timp. Să se scrie evenimentele care să corespundă situaţiilor următoare:*

a. *o afacere rentabilă;*

Scanned with CamScanner

b. *cel mult o afacere rentabilă;*

c. *două afaceri rentabile;*

d. *nici o afacere rentabilă;*

e. *cel puţin trei afaceri rentabile.*

4. *Într-o urnă sunt 4 bile albe şi 8 negre. Se scot două bile. Care este probabilitatea să extragem:*

a. *2 bile albe?*

b. *2 bile negre?*

c. *o bilă albă şi una neagră?*

d. *cel puţin o bilă albă?*

e. *cel mult o bulă albă?*

5. *Se aruncă 6 zaruri. Care este probabilitatea obţinerii tuturor numerelor de la 1 la 6? Dar probabilitatea să apară cel puţin o dată faţa 5?*

6. *O firmă încheie într-o zi două afaceri fără legătură între ele. Probabilitatea ca prima afacere să fie rentabilă este 5/6, iar pentru a doua 7/8. Care este probabilitatea ca cel puţin o afacere să fie rentabilă? Dar probabilitatea ca amândouă să fie rentabile?*

7. *Într-un grup de excursionişti de 40 de persoane s-a constatat că 32 vorbesc limba engleză, 30 vorbesc limba franceză şi 24 vorbesc limba germană. Alegând la întâmplare o persoană din grup, cu ce probabilitate minimă aceasta vorbeşte toate cele trei limbi?*

8. *Un centru de desfacere încheie un contract cu un centru de producţie în care se stipulează că acceptă produsele ultimului dacă satisfac simultan trei condiţii* A_1, A_2, A_3. *Se ştie din experienţa altor colaborări că* $P(A_1) = 0{,}92$, $P(A_2) = 0{,}88$, $P(A_3) = 0{,}85$. *În contract se mai stipulează că probabilitatea minimă ca un produs ales la întâmplare să satisfacă cele trei condiţii este 0,60. Acest prag este mai mare sau mai mic decât probabilitatea minimă ca un produs ales la întâmplare să satisfacă cele trei condiţii?*

Scanned with CamScanner

9. *La un magazin se aduc 200 de ceasuri de la o fabrică ale cărei defecte de producție sunt de 5%, 120 de ceasuri de la o fabrică ale cărei defecte de producție sunt de 8% și 160 de ceasuri de la o fabrică ale cărei defecte de producție sunt de 7%. Un client alege un ceas la întâmplare.*

a. *Cu ce probabilitate este bun?*

b. *Dar defect?*

c. *Presupunând că este defect, cu ce probabilitate provine de la prima fabrică?*

10. *La un concurs pentru o bursă de studii se prezintă 20 de studenți din anul II, 15 studenți din anul III și 25 studenți din anul IV. Știind că 70% din studenții anului II, 80% din studenții anului III, 90% din studenții anului IV îndeplinesc condițiile de înscriere la concurs, care este probabilitatea ca un candidat ales la întâmplare să îndeplinească aceste condiții? Constatând că le îndeplinește, care este probabilitatea ca să fie din anul IV?*

11. *Patru bănci acordă credite de studiu independent una de alta cu probabilitățile* $p_1 = 0{,}5$, $p_2 = 0{,}4$, $p_3 = 0{,}6$, $p_4 = 0{,}7$. *Cu ce probabilitate un student care a depus câte o cerere la fiecare bancă va primi:*

a. *un răspuns favorabil?*

b. *trei răspunsuri favorabile?*

c. *cel mult două răspunsuri favorabile?*

d. *știind că a primit un răspuns favorabil, care este probabilitatea să provină de la prima bancă?*

12. *Trei centrale telefonice funcționează independent una de alta și pot fi găsite libere la un moment dat cu probabilitățile* $p_1 = \frac{1}{3}$, $p_2 = \frac{3}{4}$, $p_3 = \frac{2}{5}$. *Se apelează pe rând fiecare centrală. Care este probabilitatea de a avea:*

a. *toate centralele libere?*

b. *doar două centrale libere?*

Scanned with CamScanner

c. *toate centralele ocupate?*

d. *cel mult două ocupate?*

13. *Un atelier realizează produse de calitatea I în proporţie de 80% şi de calitatea a II-a în proporţie de 20%. Cu ce probabilitate, un lot de 10 produse va conţine:*

a. *numai produse de calitatea I?*

b. *cel mult unul de calitatea a II-a?*

c. *produse de ambele calităţi?*

d. *cel puţin 8 produse de calitatea I?*

14. *Din 100 de operaţiuni de vânzare a unor imobile numai 70 sunt declarate vândute la adevărata valoare. Care este probabilitatea ca din 10 vânzări de imobile:*

a. *toate să fie corecte?*

b. *numai 8 să fie corecte?*

c. *cel mult 3 să fie corecte?*

15. *Într-o urnă sunt 5 bile albe, 10 bile negre, 8 roşii şi 12 verzi. Se extrag succesiv 10 bile. Cu ce probabilitate se pot obţine:*

a. *1 bilă albă, 2 bile roşii, 3 bile negre şi 4 bile verzi?*

b. *numai bile de aceeaşi culoare?*

c. *5 bile negre şi 5 bile roşii?*

d. *cel puţin 3 bile din fiecare culoare?*

16. *La o bancă s-au depus 20 de cereri pentru credite de locuinţă şi 30 de cereri pentru credite de maşină. Se analizează la întâmplare 10 cereri. Cu ce probabilitate:*

a. *7 cereri sunt pentru credite de maşină şi 3 cereri sunt pentru credite de locuinţă?*

b. *cel puţin 8 cereri sunt pentru credite de maşină?*

Scanned with CamScanner

17. *La un cerc studenţesc iau parte 8 fete şi 15 băieţi. Se aleg la întâmplare 5 persoane. Cu ce probabilitate grupul este format:*

a. *din 3 fete şi 2 băieţi?*

b. *numai din fete?*

c. *numai din băieţi?*

d. *din cel puţin trei fete?*

e. *din cel puţin o fată şi cel mult trei băieţi?*

18. *Probabilitatea ca un telefon anumit să fie liber este p=0,8 şi să fie ocupat este q=0,2. Cu ce probabilitate telefonul va fi liber:*

a. *la prima încercare?*

b. *la a doua încercare?*

c. *în cel mult trei încercări?*

d. *în cel puţin 4 încercări?*

e. *la o a doua încercare dacă ştim că este liber în cel mult trei încercări?*

19. *O firmă produce trei tipuri de maşini. Probabilitatea ca primul tip să fie fiabil este 0,8, pentru al doilea 0,7, pentru al treilea 0,6. Un client alege la întâmplare o maşină. Care este probabilitatea ca ea să fie fiabilă? Ştiind că prima a fost fiabilă şi că mai alege încă una de acelaşi tip, care este probabilitatea ca şi aceasta să fie fiabilă?*

12.4. Indicaţii şi răspunsuri

1. **a.** $S \in \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$,

$P \in \{1,2,3,4,5,6,8,9,10,12,15,16,18,20,24,25,30,36\}$;

b. $A = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1),(4,6),(5,5),(6,4)\}$,

$B = \{(1,1),(1,2),(2,1),(1,4),(2,3),(3,2),(4,1),(1,6),(2,5),$
$(3,4),(4,3),(5,2),(6,1),(5,6),(6,5)\}$,

$C = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$,

Scanned with CamScanner

$D = \{(1,1),(1,4),(2,2),(4,1),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$,

$E = \{(1,1),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(1,4),(4,1),(1,5),(5,1),(1,6),(6,1)\}$.

2. **a.** $A = \{(i,j,k) | 1 \le i < j < k \le 15\}$;

b. $B = \{(i,j,k) | 16 \le i < j < k \le 24\}$;

c. $C = \{(i,j,k) | 1 \le i < j < 15, 16 \le k \le 24\}$.

3. **a.** $A = (A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4) \cup (\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4) \cup$
$\cup (\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3 \cap \overline{A}_4) \cup (\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap A_4)$;

b. $B = A \cup (\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4)$;

c. $C = (A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4) \cup (A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap A_4) \cup ...$
$... \cup (\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3 \cap A_4)$;

d. $d = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4$;

e. $C = (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \overline{A}_4) \cup (A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3 \cap A_4) \cup$
$\cup (A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3 \cap A_4) \cup (\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \cup$
$\cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$.

4. Avem două cazuri:

1. prima bilă revine în urnă şi $p_a = \frac{4}{12} \cdot \frac{4}{12}$, $p_b = \frac{8}{12} \cdot \frac{8}{12}$,

$p_c = \frac{4}{12} \cdot \frac{8}{12} + \frac{8}{12} \cdot \frac{4}{12}$, $p_d = p_a + p_c$, $p_e = p_b + p_c = 1 - p_a$;

2. prima bilă nu revine în urnă şi $p_a = \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11}$, $p_b = \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11}$,

$p_c = \frac{4}{12} \cdot \frac{8}{11} + \frac{8}{12} \cdot \frac{4}{11}$, $p_d = p_a + p_c$, $p_e = p_b + p_c = 1 - p_a$.

5. $p_1 = \frac{6!}{6^6}$, $p_2 = 1 - \frac{5^6}{6^6}$.

Scanned with CamScanner

6. $p_1 = \frac{5}{6} + \frac{7}{8} - \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8}$, $p_2 = \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8}$.

7. $p \geq \frac{32}{40} + \frac{30}{40} + \frac{24}{40} - 2 = \frac{6}{40} = 0{,}15$.

8. $p = 0{,}92 + 0{,}88 + 0{,}85 - 2 = 0{,}65 \geq 0{,}60$.

9. **a.** $p_a = \frac{200}{480} \cdot \frac{95}{100} + \frac{120}{480} \cdot \frac{92}{100} + \frac{160}{480} \cdot \frac{93}{100}$;

b. $p_b = 1 - p_a$;

c. $p_c = \frac{1}{p_b} \cdot \frac{200}{480} \cdot \frac{5}{100}$.

10. $p_1 = \frac{20}{60} \cdot \frac{70}{100} + \frac{15}{60} \cdot \frac{80}{100} + \frac{25}{60} \cdot \frac{90}{100}$, $p_2 = \frac{1}{p_1} \cdot \frac{25}{60} \cdot \frac{90}{100}$.

11. **a.** 0,198;

b. 0,302;

c. 0,614;

d. 2/11.

12. **a.** 1/10;

b. 23/60;

c. 1/10;

d. 9/10.

13. **a.** $\left(\frac{4}{5}\right)^{10}$;

Scanned with CamScanner

b. $\left(\frac{4}{5}\right)^{10}+10\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{9}\cdot\frac{1}{5}$;

c. $1-\left(\frac{4}{5}\right)^{10}-\left(\frac{1}{5}\right)^{10}$;

d. $\left(\frac{4}{5}\right)^{10}+10\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{9}\cdot\frac{1}{5}+\frac{10\cdot 9}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{8}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{2}$.

14. **a.** $\left(\frac{7}{10}\right)^{10}$;

b. $C_{10}^{8}\cdot\left(\frac{7}{10}\right)^{8}\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^{2}$;

c. $C_{10}^{3}\cdot\left(\frac{7}{10}\right)^{3}\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^{7}+C_{10}^{2}\cdot\left(\frac{7}{10}\right)^{2}\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^{8}+$

$+C_{10}^{1}\cdot\left(\frac{7}{10}\right)^{1}\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^{9}+\left(\frac{3}{10}\right)^{10}$.

15. **Cazul I:** bila extrasă revine în urnă. Atunci

$$p_a=\frac{10!}{1!2!3!4!}\cdot\frac{1}{7}\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^{2}\cdot\left(\frac{8}{35}\right)^{3}\cdot\left(\frac{12}{35}\right)^{4},$$

$$p_b=\left(\frac{2}{7}\right)^{10}+\left(\frac{12}{35}\right)^{10};$$

$$p_c=\frac{10!}{5!5!}\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^{5}\cdot\left(\frac{8}{35}\right)^{5};$$

$$p_d=0.$$

Cazul II: bila extrasă nu revine în urnă. Atunci

$$p_a=\frac{C_5^1\cdot C_{10}^2\cdot C_8^3\cdot C_{12}^4}{C_{35}^{10}},$$

Scanned with CamScanner

$$p_b = \frac{C_{10}^{10}}{C_{35}^{10}} + \frac{C_{12}^{10}}{C_{35}^{10}},$$

$$p_c = \frac{C_{10}^{5} \cdot C_{8}^{5}}{C_{35}^{10}},$$

$$p_d = 0.$$

16. **a.** $\frac{C_{20}^{3} \cdot C_{30}^{7}}{C_{50}^{10}}$;

b. $\frac{C_{20}^{2} \cdot C_{30}^{8} + C_{20}^{1} \cdot C_{30}^{9} + C_{30}^{10}}{C_{50}^{10}}$.

17. **a.** $\frac{C_{8}^{3} \cdot C_{15}^{2}}{C_{23}^{5}}$;

b. $\frac{C_{8}^{5}}{C_{23}^{5}}$;

c. $\frac{C_{15}^{5}}{C_{23}^{5}}$;

d. $\frac{C_{8}^{3} \cdot C_{15}^{5} + C_{8}^{4} \cdot C_{15}^{1} + C_{8}^{5}}{C_{23}^{5}}$;

e. $\frac{C_{8}^{2} \cdot C_{15}^{3} + C_{8}^{3} \cdot C_{15}^{5} + C_{8}^{4} \cdot C_{15}^{1} + C_{8}^{5}}{C_{23}^{5}} = 1 - \frac{C_{15}^{5} + C_{8}^{1} \cdot C_{15}^{4}}{C_{23}^{5}}$.

18. **a.** 0,8; **b.** 0,2·0,8;

c. $0{,}8+0{,}2\cdot 0{,}8+0{,}2^2\cdot 0{,}8$; **d.** 5/31.

19. **a.** 0,7; **b.** 149/210.

Scanned with CamScanner

13. VARIABILE ALEATOARE. FUNCȚIA DE REPARTIȚIE

13.1. Considerații teoretice

A. OPERAȚII CU VARIABILE ALEATOARE

Definiția 1. Fie (Ω, K, P) un câmp borelian de probabilitate. O aplicație $\xi:\Omega\to\mathbb{R}$ se numește ***variabilă aleatoare*** dacă

$$\{\omega\in\Omega \mid \xi(\omega) < x\}\in K, \forall x\in\mathbb{R}.$$

Teorema 1. *Dacă $K=\{\Phi,\Omega\}$ atunci singurele variabile aleatoare sunt funcțiile constante.*

Definiția 2. Spunem că o variabilă aleatoare $\xi:\Omega\to\mathbb{R}$ este:

1. ***discretă*** dacă mulțimea valorilor pe care aceasta le ia este o mulțime finită sau numărabilă;
2. ***continuă*** dacă mulțimea valorilor pe care aceasta le ia este un interval sau o reuniune de intervale.

Definiția 3. Se numește ***tabel de repartiție*** al unei variabile aleatoare discrete un tabel care conține valorile pe care le ia variabila și probabilitățile cu care apar aceste valori.

Se notează cu:

$$\xi:\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix},$$

unde

$$x_i = \xi(\omega_i),\ p_i = P(\{\omega \mid \xi(\omega) = x_i\}) = P(\xi = x_i),\ i\in I\subset\mathbb{N}$$

este cel mult numărabilă, $p_i \geq 0$ și $\sum_{i\in I} p_i = 1$.

Scanned with CamScanner

Teorema 2. *Dacă ξ este o variabilă aleatoare atunci* $\{\omega \in \Omega | \xi(\omega) \le x\} \in K$, $\{\omega \in \Omega | \xi(\omega) > x\} \in K$, $\{\omega \in \Omega | \xi(\omega) \ge x\} \in K, \forall x$ *şi reciproc dacă una din relaţiile de mai sus are loc pentru orice* $x \in \mathbb{R}$, *atunci ξ este o variabilă aleatoare.*

Teorema 3. *Dacă ξ este o variabilă aleatoare şi c o constantă atunci* $\xi+c$, $c\xi$, $|\xi|$, ξ^2, $1/\xi$, $(\xi \neq 0)$ *sunt de asemenea variabile aleatoare.*

Teorema 4. *Dacă ξ şi η sunt două variabile aleatoare definite pe acelaşi câmp de probabilitate atunci:*

1. $\{\omega | \xi(\omega) > \eta(\omega)\} \in K$;
2. $\{\omega | \xi(\omega) \ge \eta(\omega)\} \in K$;
3. $\{\omega | \xi(\omega) = \eta(\omega)\} \in K$.

Teorema 5. *Dacă ξ şi η sunt două variabile aleatoare, atunci:*

$$\xi-\eta,\quad \xi+\eta,\quad \xi\eta,\quad \xi/\eta,\quad (\eta \neq 0),\quad \max(\xi,\eta),\quad \min(\xi,\eta)$$

sunt de asemenea variabile aleatoare.

Definiţia 4. Fie $\xi: \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}, 1 \le i \le m$, $\eta: \begin{pmatrix} y_j \\ q_j \end{pmatrix}, 1 \le j \le n$ două variabile aleatoare discrete şi

$$\Pi_{ij} = P(\xi = x_i, \eta = y_j), 1 \le i \le m, 1 \le j \le n, \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \Pi_{ij} = 1$$

probabilitatea de realizare simultană a evenimentelor $\{\omega | \xi(\omega) = x_i\}$ şi $\{\omega | \eta(\omega) = y_j\}$. Mulţimea (Π_{ij}) se numeşte ***repartiţia probabilistă comună*** a vectorului aleator (ξ,η), iar mulţimea (p_i) şi respectiv (q_j) se numeşte ***repartiţia probabilistă marginală*** a variabilei aleatoare ξ şi respectiv η.

Teorema 6. *Între repartiţia comună* (Π_{ij}) *şi repartiţiile marginale* (p_i) *şi* (q_j) *ale variabilelor aleatoare ξ şi η au loc relaţiile:*

Scanned with CamScanner

$$p_i = \sum_{j=1}^{n} \Pi_{ij}, q_j = \sum_{i=1}^{m} \Pi_{ij}, 1 \le i \le m, 1 \le j \le n.$$

Definiția 5. Spunem că variabilele aleatoare discrete ξ şi η sunt ***independente*** dacă $\Pi_{ij} = p_i q_j, \forall 1 \le i \le m, 1 \le j \le n$.

Definiția 6. Fie $\xi:\begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}, p_i \ge 0, \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \eta:\begin{pmatrix} y_j \\ q_j \end{pmatrix}, q_j \ge 0, \sum_{j=1}^{n} q_j = 1$ două variabile aleatoare discrete având repartiția comună $(\Pi_{ij}), \Pi_{ij} \ge 0, \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \Pi_{ij} = 1$. Numim:

1. ***produs al variabilei aleatoare*** ξ ***cu constanta*** c variabila aleatoare $c\xi:\begin{pmatrix} cx_i \\ p_i \end{pmatrix}, 1 \le i \le m$;

2. ***putere a variabilei aleatoare*** ξ ***de exponent*** r variabila aleatoare $\xi^r:\begin{pmatrix} x_i^r \\ p_i \end{pmatrix}, 1 \le i \le m$, dacă au sens puterile x_i^r;

3. ***sumă*** a variabilelor aleatoare ξ şi η variabila aleatoare $\xi + \eta:\begin{pmatrix} x_i + y_j \\ \Pi_{ij} \end{pmatrix}, 1 \le i \le m, 1 \le j \le n$;

4. ***produs*** al variabilelor aleatoare ξ şi η variabila aleatoare $\xi \cdot \eta:\begin{pmatrix} x_i y_j \\ \Pi_{ij} \end{pmatrix}, 1 \le i \le m, 1 \le j \le n$;

5. ***raport*** al variabilelor aleatoare ξ şi η variabila aleatoare $\frac{\xi}{\eta}:\begin{pmatrix} \frac{x_i}{y_j} \\ \Pi_{ij} \end{pmatrix}, 1 \le i \le m, 1 \le j \le n$, dacă $y_j \ne 0$.

Scanned with CamScanner

B. FUNCȚIA DE REPARTIȚIE A UNEI VARIABILE ALEATOARE

Definiția 1. Fie $\xi:\Omega\to\mathbb{R}$ o variabilă aleatoare. Funcția $F:\mathbb{R}\to[0,1]$ definită prin $F(x)=P(\xi<x)=P(\{\omega|\xi(\omega)<x\})$ se numește ***funcție de repartiție*** a variabilei aleatoare ξ.

Teorema 1. *Dacă ξ este o variabilă aleatoare discretă cu funcția de repartiție $F(x)$ atunci:*

1. $P(a\le\xi<b)=F(b)-F(a)$;
2. $P(a<\xi<b)=F(b)-F(a)-P(\xi=a)$;
3. $P(a<\xi\le b)=F(b)-F(a)+P(\xi=b)-P(\xi=a)$;
4. $P(a\le\xi\le b)=F(b)-F(a)+P(\xi=b), \forall a,b\in\mathbb{R}$.

Lemă. a. *Dacă (A_n) este un șir descendent de evenimente $(A_n\supset A_{n+1},\forall n)$ atunci* $\lim\limits_{n\to\infty}P(A_n)=P\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)$.

b. *Dacă (A_n) este un șir ascendent de evenimente $(A_n\subset A_{n+1},\forall n)$ atunci* $\lim\limits_{n\to\infty}P(A_n)=P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)$.

Teorema 2. *Dacă ξ este o variabilă aleatoare discretă cu funcția de repartiție $F(x)$ atunci:*

1. $F(a)\le F(b),\forall a<b$ *(F crescătoare)*;
2. $F(\infty)=\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=1$ *și* $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$;
3. $F(x-0)=F(x)$ *(F continuă la stânga)*.

Definiția 2. Fie ξ o variabilă aleatoare și F funcția de repartiție. Dacă există o funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât $F'(x)=f(x)$ (dacă F este derivabilă) atunci f se numește ***densitate de probabilitate*** sau ***de repartiție***, iar variabila aleatoare ξ se numește ***absolut continuă***.

Teorema 3. *Densitatea de probabilitate $f(x)$ are următoarele proprietăți:*

Scanned with CamScanner

1. $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$;

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$;

3. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy, \forall x \in \mathbb{R}$;

4. $P(a \leq \xi < b) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x)dx, \forall a,b \in \mathbb{R}$.

Definiția 3. Fie ξ o variabilă aleatoare și F funcția de repartiție. Se numește ***mediană*** a lui ξ și se notează cu $Me(\xi)$ un număr real cu proprietatea $P(\xi \leq Me(\xi)) \leq \frac{1}{2} \leq P(\xi \leq Me(\xi) + 0)$ sau sub altă formă $F(Me(\xi)) \leq \frac{1}{2}$ și $F(Me(\xi) + 0) \geq \frac{1}{2}$.

Definiția 4. Fie ξ o variabilă aleatoare cu funcția de repartiție $F(x)$. Se numesc ***cuantile*** ale lui ξ numerele c_1, c_2, c_3 cu proprietățile

$$F(c_1) \leq \frac{1}{4} \leq F(c_1 + 0),$$

$$F(c_2) \leq \frac{1}{2} \leq F(c_2 + 0),$$

$$F(c_3) \leq \frac{3}{4} \leq F(c_3 + 0).$$

Observația 1:

Avem $c_2 = Me(\xi)$.

Definiția 5. Fie ξ o variabilă aleatoare cu densitatea de repartiție $f(x)$. Se numește ***modă*** a lui ξ și se notează $Mo(\xi)$ abscisa punctului de maxim al lui $f(x)$. Dacă f are un singur maxim spunem că ξ este ***unimodală***, iar dacă f are mai multe maxime atunci spunem că ξ este ***plurimodală***.

Scanned with CamScanner

13.2. Exerciții rezolvate

1. *Fie* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ *și* $K = \{\Phi, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4\}, \Omega\}$. *Să se demonstreze că* (Ω, K) *este un câmp de evenimente și că aplicația* $\xi : \Omega \to \mathbb{R}, \xi(\omega_1) = 0, \xi(\omega_2) = \xi(\omega_3) = \xi(\omega_4) = 2$ *nu este o variabilă aleatoare.*

Rezolvare:

Fie $A = \{\omega_1, \omega_2\}$. Atunci $K = \{\Phi, A, \overline{A}, \Omega\}$. Evident $\forall X \in K$ rezultă că $\overline{X} \in K, \overline{A} \in K, \overline{\overline{A}} = A \in K, \overline{\Omega} = \Phi \in K$. De asemenea $\forall X, Y \in K$ rezultă că

$$X \cup Y \in K, A \cup \Phi = \Phi \cup A = A, A \cup \overline{A} = \overline{A} \cup A = \Omega,$$

$$A \cup \Omega = \Omega \cup A = \Omega, \Phi \cup \overline{A} = \overline{A} \cup \Phi = \overline{A},$$

$$\overline{A} \cup \Omega = \Omega \cup \overline{A} = \Omega, \Phi \cup \Omega = \Omega \cup \Phi = \Omega.$$

Deci (Ω, K) este un câmp de evenimente. Cum $\{\omega | \xi(\omega) < 1\} = \{\omega_1\} \notin K$, rezultă că ξ nu este o variabilă aleatoare.

2. *Într-o urnă sunt 8 bile albe și 12 bile negre. Să se scrie variabila aleatoare corespunzătoare:*

a. *culorii obținute la extragerea unei bile;*

b. *culorilor obținute la extragerea a două bile consecutiv, punând sau nepunând bila extrasă înapoi în urnă;*

c. *numărului de bile albe, obținute prin extragerea a două bile succesiv, punând sau nu bila extrasă înapoi în urnă.*

Rezolvare:

a. Avem o variabilă aleatoare calitativă, adică o variabilă aleatoare ale cărei valori nu sunt numere ci calități. În cazul nostru valorile sunt culoarea albă și culoarea neagră cu probabilitățile 8/20 și respectiv 12/20.

b. Valorile acestei variabile sunt culoarea albă, culoarea roșie, ambele culori. În primul caz, cel al punerii bilei extrase înapoi în urnă, probabilitățile corespunzătoare celor trei valori sunt $p_1 = \frac{8}{20} \cdot \frac{8}{20}$, $p_2 = \frac{12}{20} \cdot \frac{12}{20}$,

Scanned with CamScanner

$p_3 = \frac{8}{20} \cdot \frac{12}{20} + \frac{12}{20} \cdot \frac{8}{20}$. În al doilea caz, cel în care nu se pune bila extrasă înapoi în urnă, probabilitățile corespunzătoare celor trei valori sunt $p_1 = \frac{8}{20} \cdot \frac{7}{19}$, $p_2 = \frac{12}{20} \cdot \frac{11}{19}$, $p_3 = \frac{8}{20} \cdot \frac{12}{19} + \frac{12}{20} \cdot \frac{8}{19}$.

c. Variabila este cantitativă, având ca valori numerele 0, 1 şi 2. În primul caz $p_0 = \left(\frac{12}{20}\right)^2$, $p_1 = 2 \cdot \frac{8}{20} \cdot \frac{12}{20}$, $p_2 = \left(\frac{8}{20}\right)^2$,iar în al doilea $p_0 = \frac{12}{20} \cdot \frac{11}{19}$, $p_1 = \frac{8}{20} \cdot \frac{12}{19} + \frac{12}{20} \cdot \frac{8}{9}$, $p_2 = \frac{8}{20} \cdot \frac{7}{19}$.

3. *La un concurs internațional participă 10 studenți americani, 15 studenți ruşi şi 20 studenți germani numerotați la întâmplare de la 1 la 45. Să se scrie variabila aleatoare corespunzătoare*:

a. *naționalității unui student ales la întâmplare*;

b. *naționalităților în cazul alegerii la întâmplare a două numere de la 1 la 45.*

Rezolvare:

a. Valorile variabilei sunt naționalitățile americană, rusă şi germană. Probabilitățile corespunzătoare sunt $p_A = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$ $p_R = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$, $p_G = \frac{20}{45} = \frac{4}{9}$.

b. Valorile variabilei sunt: naționalitatea americană, naționalitatea rusă, naționalitatea germană, naționalitatea americană şi rusă, naționalitatea americană şi germană, naționalitatea rusă şi naționalitatea germană. Probabilitățile corespunzătoare sunt:

$$p_{AA} = \frac{10}{45} \cdot \frac{9}{44}, p_{RR} = \frac{15}{45} \cdot \frac{14}{44}, p_{GG} = \frac{20}{45} \cdot \frac{19}{44},$$

$$p_{AR} = \frac{10}{45} \cdot \frac{15}{44} + \frac{15}{45} \cdot \frac{10}{44}, p_{AG} = \frac{10}{45} \cdot \frac{20}{44} + \frac{20}{45} \cdot \frac{10}{44},$$

$$p_{RG} = \frac{15}{45} \cdot \frac{20}{44} + \frac{20}{45} \cdot \frac{15}{44}.$$

Scanned with CamScanner

4. *Fie variabilele aleatoare independente:*

$$\xi:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \text{ și } \eta:\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1/3 & 1/6 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Să se scrie variabilele aleatoare:

$$2\xi,\ \eta^2,\ \xi+\eta,\ \xi\eta,\ 2\xi+3\eta,\ \xi/\eta,\ \max(\xi,\eta),\ \sqrt{\xi}.$$

Rezolvare:

Probabilitățile corespunzătoare valorilor lui 2ξ, η^2, $\sqrt{\xi}$ sunt aceleași cu cele corespunzătoare lui ξ și respectiv η. Avem:

$$2\xi:\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix},\ \sqrt{\xi}:\begin{pmatrix} 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix},\ \eta^2:\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

$$P(\eta^2=1)=P(\eta=-1 \vee \eta=1)=P(\eta=-1)+P(\eta=1)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}.$$

În continuare, deoarece ξ și η sunt independente avem că $\Pi_{ij}=p_i q_j, 1\le i,j\le 3$. De exemplu

$$\Pi_{12}=P(\xi=0,\eta=1)=P(\xi=0)P(\eta=1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{12}.$$

Obținem

$$\xi+\eta:\begin{pmatrix} 0-1 & 0+1 & 0+2 & 1-1 & 1+1 & 1+2 & 2-1 & 2+1 & 2+2 \\ 1/6 & 1/12 & 1/4 & 1/12 & 1/24 & 1/8 & 1/12 & 1/24 & 1/8 \end{pmatrix},$$

adică

$$\xi+\eta:\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1/6 & 1/12 & 1/6 & 7/24 & 1/6 & 1/8 \end{pmatrix}.$$

Analog

$$\xi\cdot\eta:\begin{pmatrix} 0\cdot(-1) & 0\cdot 1 & 0\cdot 2 & 1\cdot(-1) & 1\cdot 1 & 1\cdot 2 & 2\cdot(-1) & 2\cdot 1 & 2\cdot 2 \\ 1/6 & 1/12 & 1/4 & 1/12 & 1/24 & 1/8 & 1/12 & 1/24 & 1/8 \end{pmatrix},$$

de unde

$$\xi\eta:\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1/12 & 1/12 & 1/2 & 1/24 & 1/6 & 1/8 \end{pmatrix}.$$

Scanned with CamScanner

Cum 2ξ şi 3η au repartiţiile

$$2\xi:\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}, 3\eta\begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1/3 & 1/6 & 1/2 \end{pmatrix},$$

obţinem repartiţia lui $2\xi+3\eta$:

$$2\xi+3\eta:\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 & 10 \\ 1/6 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/24 & 1/4 & 1/24 & 1/8 & 1/8 \end{pmatrix}.$$

La fel obţinem:

$$\frac{\xi}{\eta}:\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1/2 & 1 & 2 \\ 1/12 & 1/12 & 1/2 & 1/8 & 1/6 & 1/24 \end{pmatrix}, \max(\xi,\eta):\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1/6 & 5/24 & 5/8 \end{pmatrix}.$$

5. *Fie ξ şi η două variabile aleatoare discrete ale căror repartiţii probabiliste comună (Π_{ij}) şi marginale (p_i) şi (q_j) sunt date în tabelul următor:*

$\xi\backslash\eta$	-1	0	1	p_i
-1	$1/8$	$1/12$	$1/6$	$3/8$
1	$1/24$	$1/4$	$1/3$	$5/8$
q_j	$1/6$	$1/3$	$1/2$	1

a. *Să se scrie variabilele aleatoare ξ şi η.*

b. *Să se precizeze dacă ξ şi η sunt independente.*

c. *Să se scrie variabilele $\xi+\eta$, $\xi\cdot\eta$, ξ^2, η^2, η/ξ.*

Rezolvare:

a. Din tabelul de repartiţie de mai sus deducem că

$$\xi:\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3/8 & 5/8 \end{pmatrix} \text{ şi } \eta:\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

b. Dacă ξ şi η ar fi independente atunci

$$\Pi_{11} = P(\xi=-1,\eta=-1) = p_1q_1 = P(\xi=-1)P(\eta=-1),$$

ceea ce nu are loc întrucât $\frac{1}{8} \neq \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{6}$

Scanned with CamScanner

Deoarece

$$\Pi_{11}=1/8, \Pi_{12}=1/12, \Pi_{13}=1/6, \Pi_{21}=1/24, \Pi_{22}=1/4, \Pi_{23}=1/3,$$

obținem

$$\xi+\eta:\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1/8 & 1/12 & 1/6+1/24 & 1/4 & 1/3 \end{pmatrix},$$

$$\xi\eta:\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/6+1/24 & 1/12+1/4 & 1/8+1/3 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\eta}{\xi}:\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/24+1/6 & 1/12+1/4 & 1/8+1/3 \end{pmatrix}.$$

Repartițiile lui ξ^2 și η^2 rezultă imediat din cele ale lui ξ și η:

$$\xi^2:\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \eta^2:\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

6. *Fie ξ, η două variabile aleatoare reprezentând coordonatele a patru puncte din plan: $A(1,2)$, $B(1,3)$, $C(2,2)$, $D(2,3)$. Știind că $P(\xi=1,\eta=2)=\lambda$ și că $P(\xi=1)=\frac{1}{3}$, $P(\xi=2)=\frac{2}{3}$, $P(\eta=2)=\frac{1}{2}$, să se calculeze repartiția comună și repartițiile marginale ale celor două variabile. Pentru ce valoare a lui λ variabilele sunt independente?*

Rezolvare:

Repartiția lui ξ este dată în problemă: $\xi:\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$. Deoarece $\Pi_{11}=\lambda$ și $\Pi_{11}+\Pi_{12}=p_1, \Pi_{11}+\Pi_{21}=q_1, \Pi_{12}+\Pi_{22}=q_2, \Pi_{21}+\Pi_{22}=p_2$, rezultă că

$$\Pi_{12}=\frac{1}{3}-\lambda, \ \Pi_{21}=\frac{1}{2}-\lambda, \Pi_{22}=\frac{2}{3}-\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)=\frac{1}{6}+\lambda$$

și

$$q_2=\frac{1}{3}-\lambda+\frac{1}{6}+\lambda=\frac{1}{2}.$$

Putem calcula q_2 și din relația $q_1+q_2=1$. Obținem următorul tablou

Scanned with CamScanner

$\xi \backslash \eta$	2	3	p_i
1	λ	$1/3-\lambda$	$1/3$
2	$1/2-\lambda$	$\lambda+1/6$	$2/3$
q_j	$1/2$	$1/2$	1

Pentru ca ξ şi η să fie independente este necesar şi suficient ca $\Pi_{ij} = p_i q_j, 1 \le i, j \le 2$, adică $\Pi_{11} = p_1 q_1, \Pi_{12} = p_1 q_2, \Pi_{21} = p_2 q_1, \Pi_{22} = p_2 q_2$. Rezultă că

$$\lambda = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}, \frac{1}{3} - \lambda = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \lambda = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}, \lambda + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}.$$

Obţinem $\lambda = \frac{1}{6}$.

7. *Să se determine $p \in (0,1)$ ştiind că tablourile urmăroare reprezintă repartiţiile unor variabile aleatoare:*

a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6p^3 & 3p^2 & 4p^2 - p & 3-8p \end{pmatrix}$;

b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3}p & \frac{1}{3}p^2 & \dots & \frac{1}{3}p^{n-1} & \dots \end{pmatrix}$.

Rezolvare:

a. Este necesar ca $p_i \ge 0$ şi $\sum_{i=1}^{4} p_i = 1$, adică

$$6p^3 \ge 0, 3p^2 \ge 0, 4p^2 - p \ge 0, 3 - 8p \ge 0$$

şi

$$6p^3 + 3p^2 + (4p^2 - p) + (3 - 8p) = 1.$$

Din ultima relaţie obţinem $6p^3 + 7p^2 - 9p + 2 = 0$, care ne conduce la $p_1 = -2, p_2 = 1/3, p_3 = 1/2$. Dar p_1 nu verifică inecuaţia $6p^3 \ge 0$, iar p_3 nu verifică inecuaţia $3 - 8p \ge 0$. Singura soluţie este $p=1/3$.

Scanned with CamScanner

b. Este necesar ca $p \geq 0$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} p^{n-1} = 1$, adică $\frac{1}{3} \cdot \frac{-1}{p-1} = 1$, de unde $3-3p=1$, $p=2/3$. Am folosit faptul că suma seriei geometrice $\sum_{n=1}^{\infty} p^{n-1}$ este $\frac{1}{1-p}$ dacă $|p|<1$.

8. *Fie variabila aleatoare discretă* $\xi: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ p & p^2 & p & p^2 & p^2 \end{pmatrix}$.

a. *Să se determine p.*
b. *Să se calculeze funcţia de repartiţie a lui* ξ.
c. *Să se calculeze probabilităţile:*

$$P(\xi < 1),\ P(\xi < 3),\ P(\xi > 4),\ P(1{,}5 < \xi < 3{,}2),\ P(\xi \geq 2{,}1),$$

$$P(3{,}1 < \xi | \xi > 2{,}8),\ P(1{,}5 < \xi \leq 3 | 2 < \xi < 4).$$

Rezolvare:

a. Trebuie să avem $p + p^2 + p + p^2 = 1$ şi $p \geq 0$. Rezultă $3p^2 + 2p = 1$ şi $p \geq 0$, adică $p=1/3$.

b. Cum $F(x)=P(\xi<x)$ rezultă că

$F(x)=0$ dacă $x \leq 1$,

$F(x) = p = \frac{1}{3}$ dacă $x \in (1,2]$,

$F(x) = P(\xi = 1) + P(\xi = 2) = p + p^2 = \frac{4}{9}$ dacă $x \in (2,3]$,

$F(x) = P(\xi = 1) + P(\xi = 2) + P(\xi = 3) = p + p^2 + p = \frac{7}{9}$ dacă $x \in (3,4]$,

$F(x) = P(\xi = 1) + P(\xi = 2) + P(\xi = 3) + P(\xi = 4) = p + p^2 + p + p^2 = \frac{8}{9}$ dacă $x \in (4,5]$

şi

$F(x)=1$ dacă $x>5$.

Scanned with CamScanner

Deci:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ \frac{1}{3}, & 1<x\le 2;\\ \frac{4}{9}, & 2<x\le 3;\\ \frac{7}{9}, & 3<x\le 4;\\ \frac{8}{9}, & 4<x\le 5;\\ 1, & x>5.\end{cases}$$

c. Avem

$$P(\xi<1)=P(\Phi)=0,\ P(\xi<3)=P(\xi=1)+P(\xi=2)=\frac{4}{9},$$

$$P(\xi>4)=P(\xi=5)=\frac{1}{9},\ P(1{,}5<\xi<3{,}2)=P(\xi=2)+P(\xi=3)=\frac{4}{9},$$

$$P(\xi\ge 2{,}1)=P(\xi=3)+P(\xi=4)+P(\xi=5)=\frac{5}{9},$$

$$P(3{,}1<\xi|\xi>2{,}8)=\frac{P(3{,}1<\xi,\xi>2{,}8)}{P(\xi>2{,}8)}=\frac{P(\xi>3{,}1)}{P(\xi>2{,}8)}=\frac{2p^2}{p+2p^2}=\frac{2}{5},$$

$$P(3/2<\xi\le 3|2<\xi<4)=P(\xi=2\text{ sau }\xi=3|\xi=3)=P(\xi=3|\xi=3)=1.$$

9. *Determinați constanta $a\in\mathbb{R}$ pentru ca funcția f dată mai jos să fie densitate de repartiție și apoi să se determine funcția de repartiție corespunzătoare. Să se calculeze mediana, cuantilele și moda variabilei aleatoare ξ având densitatea de repartiție f:*

$$f(x)=\begin{cases}2x, & x\in[0,1/2]\\ a-\frac{2x}{3}, & x\in(1/2,2]\\ 0, & \text{în rest}.\end{cases}$$

Rezolvare:

Avem $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$, de unde $\int_{-\infty}^{0}0dx+\int_{0}^{1/2}xdx+\ +\int_{1/2}^{2}\left(a-\frac{2x}{3}\right)dx+$

Scanned with CamScanner

$$+\int_2^{\infty} 0dx = 1 \text{ sau } x^2\Big|_0^{1/2} + \left(ax - \frac{x^2}{3}\right)\Big|_{1/2}^{2} = 1.$$ Rezultă $a = \frac{4}{3}$ şi deci

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & x \in [0,1/2] \\ \frac{1}{4} + \int_{1/2}^{x} \frac{4-2y}{3} dy, & x \in (1/2,2] \\ 1, & x > 2 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & x \in [0,1/2] \\ \frac{4x - x^2 - 1}{3}, & x \in (1/2,2] \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

Întrucât F este continuă vom avea $F(x) = F(x+0), \forall x$, deci $F(Me(\xi)) \leq \frac{1}{2}$ şi $F(Me(\xi)) \geq \frac{1}{2}$, adică $F(Me(\xi)) = \frac{1}{2}$. Aceasta se realizează pentru $\frac{4x - x^2 - 1}{3} = \frac{1}{2}$, de unde $x = 2 - \sqrt{\frac{3}{2}} \in (1/2,2]$. Aşadar $Me(\xi) = 2 - \sqrt{\frac{3}{2}} = c_2$. Se observă că $F(1/2)=1/4$ deci $c_1 = \frac{1}{2}c_3$ rezultă din $F(x) = 3/4$, adică $\frac{4x - x^2 - 1}{3} = \frac{3}{4}$, de unde $c_3 = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}$. Deoarece f este crescătoare pe [0,1/2] şi descrescătoare pe (1/2,2], $x = \frac{1}{2}$ este punct de maxim (singurul), prin urmare $Mo(\xi) = \frac{1}{2}$.

10. *Determinaţi constantele a şi* $b \in \mathbb{R}$ pentru ca funcţia

$$F(x) = \begin{cases} ae^{-x^2} + b, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

să fie funcţie de repartiţie. Calculaţi apoi densitatea de repartiţie, mediana, moda şi cuantilele unei variabile aleatoare ξ *având funcţia de repartiţie F.*

Scanned with CamScanner

Rezolvare:

Din continuitatea lui F la stânga în x=0 rezultă $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} F(x) = F(0)$, adică a+b=0. Cum $F(\infty) = \lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}(ae^{-x^2}+b) = b$, rezultă că b=1 şi a= -1. Aşadar

$$F(x) = \begin{cases} 1-e^{-x^2}, & x \geq 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}.$$

Derivata lui F este $F'(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2}, & x \geq 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$ şi observăm că $F_s'(0) = F_d'(0) = 0$, adică F este derivabilă şi în x=0. Deci $f(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2}, & x \geq 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$. Din condiţia $F(Me(\xi)) = \frac{1}{2}$ rezultă $1-e^{-Me(\xi)} = \frac{1}{2}$, adică $Me(\xi) = \ln 2 = c_2$. Din relaţiile $F(c_1) = 1/4$ şi $F(c_3) = 3/4$, rezultă $1-e^{-c_1} = \frac{1}{4}$, $1-e^{-c_3} = \frac{3}{4}$, de unde $e^{-c_1} = \frac{3}{4}$, $e^{-c_3} = \frac{1}{4}$. Rezultă că $c_1 = \ln 4 - \ln 3$ şi $c_3 = \ln 4 = 2\ln 2$. Pentru a afla maximele lui f calculăm derivata sa: $f'(x) = \begin{cases} (2-4x^2)e^{-x^2}, & x>0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$. Din $f'(x) = 0, x>0$ rezultă $2-4x^2 = 0, x>0$, adică $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Cum f' este pozitivă la stânga lui $\frac{\sqrt{2}}{2}$ şi negativă la dreapta lui $\frac{\sqrt{2}}{2}$, obţinem că f este crescătoare la stânga lui $\frac{\sqrt{2}}{2}$ şi descrescătoare la dreapta, deci $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ este punct de maxim pentru f, adică $Mo(\xi) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Scanned with CamScanner

13.3. Exerciții propuse

1. *Fie* $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$ *şi* $K=\{\Phi,\{\omega_1\},\{\omega_2,\omega_3\},\Omega\}$. *Să se demonstreze că* (Ω,K) *este un câmp de evenimente. Care din următoarele aplicații este variabilă aleatoare?*

$$\xi_1:\Omega\to\mathbb{R},\xi_1(\omega_1)=1,\xi_1(\omega_2)=\xi_1(\omega_3)=1\,;$$

$$\xi_2:\Omega\to\mathbb{R},\xi_2(\omega_1)=1,\xi_2(\omega_2)=2,\xi_2(\omega_3)=3\,;$$

$$\xi_3:\Omega\to\mathbb{R},\xi_3(\omega_1)=2,\xi_3(\omega_2)=\xi_3(\omega_3)=1\,.$$

2. *La un magazin lucrează 5 bărbați şi 10 femei. Să se scrie variabila aleatoare corespunzătoare:*
   a. *sexului persoanei alese la întâmplare dintre angajați;*
   b. *sexelor persoanelor alese la întâmplare prin tragerea la sorți a doi angajați;*
   c. *numărului de bărbați la tragerea la sorți a trei angajați.*

3. *Din trei grupe de studenți, având câte 25 studenți au promovat toate examenele ultimei sesiuni 10, 15, respectiv 20 de studenți. Se alege la întâmplare câte un student din fiecare grupă. Să se scrie variabila aleatoare corespunzătoare numărului de studenți integralişti din cei trei.*

4. *Fie variabilele aleatoare independente:*

$$\xi:\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6}\end{pmatrix},\ \eta:\begin{pmatrix}0 & 2\\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}.$$

Să se scrie variabilele aleatoare:

$$3\xi,\ \ \xi^2,\ \ \eta^3,\ \ 3\xi\text{-}2\eta,\ \ \xi+\eta,\ \ \xi\text{-}\eta,\ \ \xi\cdot\eta,\ \ \max(\xi,\eta).$$

5. *Fie variabilele aleatoare independente*

$$\xi:\begin{pmatrix}1 & 2\\ p & 1-p\end{pmatrix},\ \eta:\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ q & r & 1-q-r\end{pmatrix},$$

Scanned with CamScanner

având suma şi produsul date de

$$\xi+\eta:\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1/6 & 1/3 & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \xi\eta\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 & 12 \\ 1/6 & 5/12 & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Să se determine p, q şi r.

6. *Fie ξ şi η două variabile aleatoare discrete ale căror repartiţii comune (Π_{ij}) şi marginale (p_i) şi (q_j) sunt date incomplet în tabelul următor:*

$\xi \backslash \eta$	-2	0	2	p_i
1			1/12	1/3
3	1/24	1/12		
5	1/4		1/8	1/2
q_j		1/4		

a. *Să se completeze acest tabel şi să se scrie variabilele ξ şi η, precizând dacă sunt sau nu independente.*

b. *Să se scrie suma şi produsul celor două variabile.*

7. *Fie ξ şi η două variabile aleatoare discrete ale căror repartiţii comune (Π_{ij}) şi marginale (p_i) şi (q_j) sunt date incomplet în tabelul următor:*

$\xi \backslash \eta$	-1	1	p_i
0			1/3
2		λ	
q_j		1/4	

a. *Să se completeze acest tabel, precizând mulţimea valorilor posibile ale lui $\lambda \in \mathbb{R}$.*

b. *Pentru ce valori ale lui λ sunt independente ξ şi η.*

c. *Să se scrie diferenţa şi raportul celor două variabile.*

8. *Să se determine parametrii care apar în următoarele variabile aleatoare discrete:*

Scanned with CamScanner

a. $\xi_1: \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ p & 2p & 3p & 4p \end{pmatrix}$;

b. $\xi_2: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ p^2 & 4p & 6p^2 & 3p & p^2 \end{pmatrix}$;

c. $\xi_3: \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n & \dots \\ \frac{1}{(a+1)(a+2)} & \frac{1}{(a+2)(a+3)} & \dots & \frac{1}{(a+n+1)(a+n+2)} & \dots \end{pmatrix}$;

d. $\xi_4: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{1!} & \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2!} & \dots & \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{n!} & \dots \end{pmatrix}$;

e. $\xi_5: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n & \dots \\ p & \frac{p}{3} & \frac{p}{3^2} & \dots & \frac{p}{3^n} & \dots \end{pmatrix}$.

9. *Fie variabila aleatoare discretă*

$$\xi: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3p^2 & 2p^2 & p^2 & 3p & 2p \end{pmatrix}.$$

a. *Să se determine p.*

b. *Să se scrie funcția de repartiție a lui* ξ.

c. *Să se calculeze probabilitățile:*

$P(\xi < 1{,}2)$, $P(\xi \geq 2{,}3)$, $P(1{,}7 < \xi < 1{,}9)$,

$P(2{,}1 \leq \xi < 3{,}2)$, $P(2{,}1 \leq \xi < 3{,}2)$, $P(\xi > 3{,}5 | \xi > 1{,}8)$, $P(\xi \leq 2 | \xi \leq 1)$.

10. *Știind că funcția de repartiție a variabilei aleatoare discrete* ξ *este*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ 1/6, & 1 < x \leq 3 \\ 5/24, & 3 < x \leq 5 \\ 7/12, & 5 < x \leq 7 \\ 1, & x > 7 \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

să se determine tabloul de repartiție al lui ξ. Să se calculeze probabilitățile:

$$P(\xi^2 < 10),\ P(2\xi > 9),\ P(1{,}2 < \sqrt{\xi} < 1{,}8),\ P(\xi^3 > 30 | 2\xi + 1 < 12).$$

11. *Fie ξ o variabilă aleatoare continuă și F funcția sa de repartiție:*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x/4, & 0 \le x < 1 \\ 1/4, & 1 \le x < 2 \\ x/8, & 2 \le x < 4 \\ 1/2, & 4 \le x < 6 \\ x/12, & 6 \le x < 12 \\ 1, & x \ge 12 \end{cases}$$

a. *Să se determine densitatea de repartiție f(x).*

b. *Să se calculeze probabilitățile:*

$$P(\xi < 2{,}5), P(\xi > 4{,}7), P\left(\frac{1}{3} < \xi < \frac{9}{4}\right),$$
$$P(2 \le \xi < 5 \,|\, 3 < \xi), P(\xi^2 > 17 \,|\, \xi^3 < 27).$$

12. *Determinați constanta $a \in \mathbb{R}$ pentru ca funcțiile date mai jos să fie densități de repartiție și apoi determinați funcțiile de repartiție corespunzătoare:*

a. $f(x) = \begin{cases} x + a, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$;

b. $f(x) = \begin{cases} 2e^{-ax}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$;

c. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{\cos^2 x}, & x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$;

Scanned with CamScanner

d. $f(x)=\begin{cases} a\cos x, & x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right] \\ 0, & \textit{în rest} \end{cases};$

e. $f(x)=\begin{cases} \frac{a}{\sqrt{4-x^2}}, & x\in(-2,2) \\ 0, & \textit{în rest} \end{cases};$

f. $f(x)=\begin{cases} a^2x^2+ax, & x\in[0,1] \\ 0, & \textit{în rest} \end{cases}.$

13. *Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ ştiind că funcţia*

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ a\sin x+b, & x\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right) \\ 1, & x\geq\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

este o funcţie de repartiţie. Calculaţi apoi densitatea de repartiţie, mediana, moda şi cuantilele unei variabile aleatoare ξ, având funcţia de repartiţie F.

14. *Aceleaşi cerinţe pentru:*

a. $f(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ ae^{-3x}+b, & x\geq 0 \end{cases};$

b. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<-1 \\ 3ax-ax^3+b, & x\in[-1,1) \\ 1, & x\geq 1 \end{cases}.,$

13.4. Indicaţii şi răspunsuri

1. ξ_1, ξ_3 sunt variabile aleatoare, ξ_2 nu este variabilă aleatoare.

Scanned with CamScanner

2. a. $\xi:\begin{pmatrix} B & F \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$;

b. $\xi:\begin{pmatrix} B & F & BF \\ 2/21 & 3/7 & 10/21 \end{pmatrix}$;

c. $\xi:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \dfrac{C_{10}^3}{C_{15}^3} & \dfrac{C_5^1 \cdot C_{10}^2}{C_{15}^3} & \dfrac{C_5^2 \cdot C_{10}^1}{C_{15}^3} & \dfrac{C_5^3}{C_{15}^3} \end{pmatrix}$.

3. $\xi:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 6/125 & 37/125 & 58/125 & 24/125 \end{pmatrix}$.

4. $3\xi:\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 \end{pmatrix}, \xi^2:\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \eta^3:\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$,

$3\xi - 2\eta:\begin{pmatrix} -7 & -4 & -3 & -1 & 0 & 3 \\ 1/12 & 1/8 & 1/4 & 1/24 & 3/8 & 1/8 \end{pmatrix}$,

$\xi + \eta:\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1/4 & 3/8 & 5/24 & 1/8 & 1/24 \end{pmatrix}$,

$\xi\eta:\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1/12 & 7/8 & 1/24 \end{pmatrix}, \max(\xi, \eta):\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5/8 & 1/8 & 1/4 \end{pmatrix}$.

5. $p = \dfrac{1}{3}, q = \dfrac{1}{2}, r = \dfrac{1}{4}$.

6. a.

$\xi \backslash \eta$	-2	0	2	p_i
1	5/24	1/24	1/12	1/3
3	1/24	1/12	1/24	1/6
5	1/4	1/8	1/8	1/2
q_j	1/2	1/4	1/4	1

Scanned with CamScanner

$\xi:\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1/3 & 1/6 & 1/2 \end{pmatrix}$, $\eta:\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$. Nu sunt independente deoarece $\frac{1}{6} = P(\xi = 1)P(\eta = -2) \neq P(\xi = 1, \eta = -2) = \frac{5}{24}$.

b. $\xi+\eta:\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 5 & 7 \\ 5/24 & 1/12 & 5/12 & 1/6 & 1/8 \end{pmatrix}$,

$\xi\eta:\begin{pmatrix} -10 & -6 & -2 & 0 & 2 & 6 & 10 \\ 1/4 & 1/24 & 5/24 & 1/4 & 1/2 & 1/24 & 1/8 \end{pmatrix}$.

7. **a.** $\lambda \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$

$\xi \backslash \eta$	-1	1	p_i
0	$\lambda + 1/12$	$1/4 - \lambda$	$1/3$
2	$2/3 - \lambda$	λ	$2/3$
q_j	$3/4$	$1/4$	1

b. $\lambda = \frac{1}{6}$;

c. $\xi - \eta:\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1/4-\lambda & 2\lambda + 1/12 & 2/3-\lambda \end{pmatrix}$, $\frac{\xi}{\eta}:\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2/3-\lambda & 1/3 & \lambda \end{pmatrix}$.

8. **a.** $p=1/10$; **b.** $p=1/8$;

c. $a=0$; **d.** $a=\ln 2$;

e. $p=2/3$.

9. **a.** p=1/6.

10. $\xi:\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1/6 & 1/24 & 3/8 & 5/12 \end{pmatrix}$,

Scanned with CamScanner

$P(\xi^2 < 10) = \frac{5}{24}, P(2\xi > 9) = \frac{19}{24},$

$P(1{,}2 < \sqrt{\xi} < 1{,}8) = \frac{1}{24}, P(\xi^3 > 30 \mid 2\xi + 1 < 12) = \frac{9}{14}.$

11. **a.** $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty,0] \cup [1,2] \cup [4,6] \cup [12,\infty) \\ 1/4, & x \in (0,1) \\ 1/8, & x \in (2,4) \\ 1/12, & x \in (6,12) \end{cases}$

b. $P(\xi < 2{,}5) = 0{,}3125, P(\xi > 4{,}7) = 1/2,$

$P\left(\frac{1}{3} < \xi < \frac{9}{4}\right) = 19/96, P(2 \le \xi < 5 \mid 3 < \xi) = 1/5,$

$P(\xi^2 > 17 | \xi^3 < 27) = 0.$

12. **a.** $a=1/2$;

b. $a=2$;

c. $a=1$;

d. $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$;

e. $a = \frac{1}{\pi}$;

f. $a = \frac{-3+\sqrt{57}}{4}$.

12. $a=2, b=0,\ f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \text{ sau } x \ge \frac{\pi}{6} \\ 2\cos x, & x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right) \end{cases},$

$Me(\xi) = \arcsin\frac{1}{4}, c_1 = \arcsin\frac{1}{8},$

Scanned with CamScanner

$c_2 = Me(\xi), c_3 = \arcsin\frac{3}{8}$, $Mo(\xi)$ nu există.

13. **a.** $a=-1, b=1, f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 3e^{-3x}, & x>0\end{cases}$,

$$Me(\xi)=\frac{1}{3}\ln 2=c_2,\ c_1=\frac{1}{3}\ln\frac{4}{3},\ c_3=\frac{1}{3}\ln 4,\ Mo(\xi) \text{ nu există;}$$

b. $a=\frac{1}{4}, b=\frac{1}{2}, f(x)=\begin{cases}0, & x\le -1\\ \frac{3}{4}-\frac{3}{4}x^2, & x\in(-1,1),\\ 0, & x\ge 1\end{cases}$ $Me(\xi)=0=c_2, c_1$ este rădăcina ecuației $c^3-3c-1=0$ aflată în intervalul (-1,1), c_3 este rădăcina ecuației $c^3-3c+1=0$ aflată în intervalul (-1,1), $Mo(\xi)$=0.

Scanned with CamScanner

14. CARACTERISTICI NUMERICE ALE VARIABILELOR ALEATOARE

14.1. Considerații teoretice

Definiția 1. Fie ξ o variabilă aleatoare discretă dată prin tabloul de repartiție $\xi: \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}, i \in I$ cel mult numărabilă $p_i \geq 0, i \in I, \sum_{i \in I} p_i = 1$. Se numește ***valoarea medie*** (sau ***medie***) a lui ξ și se notează cu $M(\xi)$ numărul (dacă există) $M(\xi) = \sum_{i \in I} x_i p_i$.

Definiția 2. Fie ξ o variabilă aleatoare continuă dată prin densitatea de repartiție $f(x)$. Se numește ***valoare medie*** (sau ***medie***) a lui ξ și se notează cu $M(\xi)$ numărul (dacă există) $M(\xi) = \int_R x \cdot f(x)dx$.

Teorema 1. (*Proprietăți ale mediei*)

1. $M(c)=c$, *c constantă*;
2. $M(a\xi+b)=aM(\xi)+b, \forall a,b \in \mathbb{R}$;
3. $M(a\xi+b\eta)=aM(\xi)+bM(\eta), \forall a,b \in \mathbb{R}$;
4. $M\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i M(\xi_i), \forall a_i \in \mathbb{R}$;
5. *Dacă* ξ *și* η *sunt independente atunci*: $M(\xi\eta)=M(\xi)M(\eta)$;
6. *Dacă* (ξ_i), $i = \overline{1,n}$ *sunt independente în totalitate, atunci*:

$$M\left(\prod_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \prod_{i=1}^{n} M(\xi_i);$$

Scanned with CamScanner

7. *Dacă* $m \le \xi \le M$ *atunci* $m \le M(\xi) \le M$.

Definiția 3. Fie ξ o variabilă aleatoare având media $M(\xi)$. Se numeşte ***dispersie*** a lui ξ numărul (dacă există)

$$D^2(\xi), D^2(\xi) = M[(\xi - M(\xi))^2] .$$

Definiția 4. Variabila aleatoare ξ-$M(\xi)$ se numeşte ***abatere de la medie*** a variabilei aleatoare ξ, iar numărul notat $D(\xi)$, $D(\xi) = \sqrt{D^2(\xi)}$, se numeşte ***abatere medie pătratică*** a variabilei aleatoare ξ.

Teorema 2. (*Proprietăți ale dispersiei*)

1. $D^2(\xi) \ge 0, \forall \xi$;
2. $D^2(\xi) = M(\xi^2) - M(\xi)^2$;
3. $D^2(a\xi) = a^2 D(\xi), \forall a \in \mathbb{R}$;
4. $D^2(a\xi + b) = a^2 D^2(\xi), \forall a, b \in \mathbb{R}$;
5. *Dacă* ξ *şi* η *sunt independente atunci*: $D^2(\xi + \eta) = D^2(\xi) + D^2(\eta)$;
6. $D^2(\xi + \eta) = D^2(\xi) + D^2(\eta) + 2[M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta)]$;
7. *Dacă* $(\xi_i), i = \overline{1,n}$ *sunt independente două câte două, atunci*:

$$D^2\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D^2(\xi_i) .$$

Inegalitatea lui Cebâşev

Dacă ξ este o variabilă aleatoare pentru care există $M(\xi)$ şi $D^2(\xi)$ şi sunt finite, atunci $\forall \varepsilon > 0$ au loc inegalitățile:

1. $P(|\xi - M(\xi)| < \varepsilon) \ge 1 - \dfrac{D^2(\xi)}{\varepsilon^2}$;
2. $P(|\xi - M(\xi)| \ge \varepsilon) \le \dfrac{D^2(\xi)}{\varepsilon^2}$.

Scanned with CamScanner

Teorema 3. (*Legea celor* 3σ)

Dacă $\varepsilon=3\sigma$, $\sigma=D(\xi)$, *atunci* $P(|\xi - M(\xi)| \geq 3\sigma) \leq \frac{1}{9}$.

Definiția 5. Fiind dată o variabilă aleatoare ξ se numeşte ***moment inițial de ordinul*** $r, r \in \mathbb{N}^*$, al variabilei ξ numărul (dacă există) notat $\alpha_r(\xi)$ sau $M_r(\xi)$

$$\alpha_r(\xi) = M_r(\xi) = M(\xi^r).$$

Teorema 4. *Momentul inițial de ordinul r, dacă există, se calculează astfel:*

1. *pentru o variabilă aleatoare discretă*

$$\xi : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}, \alpha_r(\xi) = \sum_{i \in I} x_i^r p_i ;$$

2. *pentru o variabilă aleatoare continuă* $\alpha_r = \int_{\mathbf{R}} x^r f(x) dx$.

Definiția 6. Se numeşte ***moment centrat de ordinul*** $r, r \in \mathbb{N}^*$, al variabilei aleatoare ξ, momentul inițial de ordinul r (dacă există) al abaterii de la medie a lui ξ:

$$\mu_r(\xi) = M_r[\xi - M(\xi)] = M[(\xi - M(\xi))^r].$$

Teorema 5. *Pentru o variabilă aleatoare discretă* $\xi : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}$, *avem*

$$\mu_r(\xi) = \sum_{i \in I} (x_i - M(\xi))^r p_i ,$$

iar pentru o variabilă aleatoare continuă avem

$$\mu_r(\xi) = \int_{\mathbf{R}} (x - M(\xi))^r f(x) dx .$$

Definiția 7. Dacă există $\mu_3(\xi)$, $\mu_2(\xi)$ şi $\mu_2(\xi) \neq 0$, atunci numărul $A = \frac{\mu_3(\xi)}{\mu_2(\xi)^{3/2}}$ se numeşte ***coeficient de asimetrie*** al variabilei aleatoare ξ.

Scanned with CamScanner

Definiția 8. Dacă există $\mu_4(\xi)$, $\mu_2(\xi)$ şi $\mu_2(\xi)\neq 0$, atunci numărul $E=\frac{\mu_4(\xi)}{\mu_2^2(\xi)}$ se numeşte ***coeficient de exces*** (sau ***de turtire***) al variabilei aleatoare ξ.

Teorema 6. (*relația lui Pearson*)

Dacă există $M(\xi)$, $Me(\xi)$ şi $Mo(\xi)$ atunci $Mo(\xi)+2M(\xi)=3Me(\xi)$.

14.2. Exerciții rezolvate

1. *Să se determine variabilele aleatoare independente*

$$\xi:\begin{pmatrix} x & x+1 & x+2 & x+3 \\ p & 2p & 3p & 4p \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad \eta:\begin{pmatrix} y & 2y & 3y \\ q & q^2 & q^2 \end{pmatrix},$$

știind că $M(\xi)=2$ și $M(\eta)=7$. Să se calculeze apoi $M(2\xi+3\eta)$, $D^2(\xi)$, $D^2(\eta)$ și $D^2(2\xi+3\eta)$.

Rezolvare:

Deoarece ξ este o variabilă aleatoare trebuie să avem $p+2p+3p+4p=1$, adică $p=1/10$. Atunci

$$M(\xi)=x\cdot p+(x+1)\cdot 2p+(x+2)\cdot 3p+(x+3)\cdot 4p=10px+20p=x+2.$$

Cum $M(\xi)=2$ rezultă că $x=0$.

Analog $q+q^2+q^2=1$, adică $2q^2+q-1=0$, de unde $q=1/2$. Rezultă că $M(\eta)=y\cdot q+2y\cdot q^2+3y\cdot q^2=\frac{7}{4}y$. Cum $M(\eta)=7$ avem că $y=4$. Tablourile de repartiție ale lui ξ şi η vor fi

$$\xi:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1/10 & 1/5 & 3/10 & 2/5 \end{pmatrix}, \ \eta:\begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Folosind proprietățile mediei avem ,

$$M(2\xi+3\eta)=M(2\xi)+M(3\eta)=2M(\xi)+3M(\eta)=2\cdot 2+3\cdot 7=25.$$

Scanned with CamScanner

Pentru calcularea dispersiilor avem nevoie să calculăm mediile lui ξ^2 şi η^2. Acestea au tablourile de repartiţie $\xi^2: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ 1/10 & 1/5 & 3/10 & 2/5 \end{pmatrix}$, $\eta: \begin{pmatrix} 16 & 64 & 144 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$, astfel că

$$M(\xi^2) = 0 \cdot \frac{1}{10} + 1 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{3}{10} + 9 \cdot \frac{2}{5} = 5$$

şi

$$M(\eta^2) = 16 \cdot \frac{1}{2} + 64 \cdot \frac{1}{4} + 144 \cdot \frac{1}{4} = 60.$$

Atunci

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - M(\xi)^2 = 5 - 2^2 = 1$$

şi

$$D^2(\eta) = M(\eta^2) - M(\eta)^2 = 60 - 7^2 = 11.$$

Cum ξ şi η sunt independente, rezultă că şi 2ξ şi 3η sunt independente şi avem

$$D^2(2\xi + 3\eta) = D^2(2\xi) + D^2(3\eta) =$$
$$= 2^2 D^2(\xi) + 3^2 D^2(\eta) = 4 \cdot 1 + 9 \cdot 11 = 103.$$

2. *Să se determine variabilele aleatoare ξ şi η ale căror repartiţii sunt date incomplet în tabelul de mai jos, ştiind că $M(\xi)=17$ şi $D^2(\eta)=1$. Să se calculeze apoi $M(\xi\eta)$ şi $D^2(\xi-\eta)$.*

$\xi \backslash \eta$	$-b$	0	b	p_i
a	$1/5$	$1/10$		
a^2		$2/5$		$3/5$
q_j			$1/5$	

Rezolvare:

Deoarece $p_1 + p_2 = 1$ rezultă că $p_1 = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$. Mai departe $\Pi_{11} + \Pi_{12} + \Pi_{13} = p_1$, adică $\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \Pi_{13} = \frac{2}{5}$, deci $\Pi_{13} = \frac{1}{10}$. Cum

Scanned with CamScanner

$\Pi_{13}+\Pi_{23}=q_3$ rezultă că $\Pi_{23}=\frac{1}{5}-\frac{1}{10}=\frac{1}{10}$. Dar $\Pi_{21}+\Pi_{22}+\Pi_{23}=p_2$, adică $\Pi_{21}+\frac{2}{5}+\frac{1}{10}=\frac{3}{5}$, de unde $\Pi_{21}=\frac{1}{10}$. Din $\Pi_{11}+\Pi_{21}=q_1$ şi $\Pi_{22}+\Pi_{12}=q_2$, rezultă că $q_1=\frac{3}{10}$ şi $q_2=\frac{1}{2}$. Obţinem astfel $\xi:\begin{pmatrix} a & a^2 \\ 2/5 & 3/5 \end{pmatrix}$, $\eta:\begin{pmatrix} -b & 0 & b \\ 3/10 & 1/2 & 1/5 \end{pmatrix}$. Astfel $M(\xi)=a\cdot\frac{2}{5}+a^2\cdot\frac{3}{5}=17$, adică $3a^2+2a-85=0$, de unde $a_1=5, a_2=-\frac{17}{3}$. Deoarece $M(\eta)=-\frac{3b}{10}+0\cdot\frac{1}{2}+\frac{b}{5}=-\frac{b}{10}$ şi $M(\eta^2)=(-b)^2\cdot\frac{3}{10}+0^2\cdot\frac{1}{2}+b^2\cdot\frac{1}{5}=\frac{b^2}{2}$, rezultă că $D^2(\eta)=M(\eta^2)-M(\eta)^2=\frac{b^2}{2}-\frac{b^2}{100}=\frac{49b^2}{100}$. Din ipoteză $D^2(\eta)=1$, astfel că $b^2=\frac{100}{49}$, adică $b=\frac{10}{7}$. Din tabloul repartiţiei comune (Π_{ij}) avem

$$\xi\eta:\begin{pmatrix} -a^2b & -ab & 0 & ab & a^2b \\ 1/10 & 1/5 & 1/2 & 1/10 & 1/10 \end{pmatrix}$$

şi

$$\xi-\eta:\begin{pmatrix} a-b & a^2-b & a & a^2 & a+b & a^2+b \\ 1/10 & 1/10 & 1/10 & 2/5 & 1/5 & 1/10 \end{pmatrix}.$$

Astfel $M(\xi\eta)=-\frac{a^2b}{10}-\frac{ab}{5}+\frac{ab}{10}+\frac{a^2b}{10}=-\frac{ab}{10}=-\frac{a}{7}$.

Dacă $a=5$ $M(\xi\eta)=-\frac{5}{7}$, iar dacă $a=-\frac{17}{3}$ $M(\xi\eta)=\frac{17}{21}$. Pentru calcularea dispersiei lui ξ-η, avem nevoie de:

$$M(\xi-\eta)=\frac{a-b}{10}+\frac{a^2-b}{10}+\frac{a}{10}+\frac{2a^2}{5}+\frac{a+b}{5}+\frac{a^2+b}{10}=$$

$$=\frac{6a^2+4a+b}{10}=\frac{6a^2+4a+\frac{10}{7}}{10}$$

Scanned with CamScanner

$$M[(\xi-\eta)^2]=\frac{(a-b)^2}{10}+\frac{(a^2-b)^2}{10}+\frac{a^2}{10}+\frac{2a^4}{5}+\frac{(a+b)^2}{5}+\frac{(a^2+b^2)^2}{10}=$$

$$=\frac{6a^4+4a^2+2ab+5b^2}{10}=\frac{6a^4+4a^2+\frac{20}{7}a+\frac{500}{49}}{10}.$$

Pentru a=5 avem $M(\xi-\eta)=\frac{120}{7}$ şi $M[(\xi-\eta)^2]=\frac{18985}{49}$, deci

$$D^2(\xi-\eta)=\frac{18985}{49}-\frac{14400}{49}=\frac{4585}{49}.$$

3. *Să se determine parametrii care apar în repartiţiile următoare şi să se calculeze apoi $M(\xi)$ şi $D^2(\xi)$, ξ fiind o variabilă aleatoare, având repartiţia respectivă:*

a. $\xi:\begin{pmatrix} n \\ \frac{1}{4}q^n \end{pmatrix}, n\in\mathbb{N}, q>0;$

b. $\xi:\begin{pmatrix} x \\ a(x^2+2x) \end{pmatrix}, x\in[0,1], a>0;$

c. $\xi:\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}, f(x)=\begin{cases} a^2x^3, & x\in[0,1] \\ \frac{1}{2}ax, & x\in(1,2] \\ 0, & \text{\textit{în rest}}. \end{cases}$

Rezolvare:

a. Din condiţia $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4}q^n=1$ rezultă că $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-q}=1\Rightarrow 1-q=\frac{1}{4}\Rightarrow q=\frac{3}{4}$.

Atunci

$$M(\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}n\cdot\frac{1}{4}q^n=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}n\cdot q^n=\frac{1}{4}q\sum_{n=0}^{\infty}n\cdot q^{n-1}=$$

$$=\frac{1}{4}q\sum_{n=0}^{\infty}(q^n)'=\frac{1}{4}q\left(\sum_{n=0}^{\infty}q^n\right)'=$$

Scanned with CamScanner

$$=\frac{1}{4}q\cdot\left(\frac{1}{1-q}\right)'=\frac{1}{4}q\frac{1}{(1-q)^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\frac{1}{16}}=3$$

$$M(\xi^2)=\sum_{n=0}^{\infty}n^2\cdot\frac{1}{4}q^n=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}n^2\cdot q^n=\frac{1}{4}q\sum_{n=0}^{\infty}n^2\cdot q^{n-1}=$$

$$=\frac{1}{4}q\sum_{n=0}^{\infty}n(q^n)'=\frac{1}{4}q\left(\sum_{n=0}^{\infty}nq^n\right)'=$$

$$=q\left(\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}nq^n\right)'=\frac{1}{4}q\left[\frac{1}{(1-q)^2}\right]'=\frac{1}{4}q\frac{2}{(1-q)^3}=24.$$

Astfel $D^2(\xi)=M(\xi^2)-M(\xi)^2=24-9=15$.

b. Din condiția $\int_0^1 a(x^2+2x)dx=1$ rezultă că

$$a\left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)\Big|_0^1=1\Rightarrow a\cdot\frac{4}{3}=1\Rightarrow a=\frac{3}{4}.$$

Atunci

$$M(\xi)=\int_0^1 x\cdot f(x)dx=\int_0^1 x\cdot\frac{3}{4}(x^2+2x)dx=\frac{3}{4}\left(\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}\right)\Big|_0^1=\frac{11}{16},$$

$$M(\xi^2)=\int_0^1 x^2\cdot f(x)dx=\int_0^1 x^2\cdot\frac{3}{4}(x^2+2x)dx=\frac{3}{4}\left(\frac{x^5}{5}+\frac{2x^4}{4}\right)\Big|_0^1=\frac{21}{40}.$$

Astfel $D^2(\xi)=M(\xi^2)-M(\xi)^2=\frac{21}{40}-\left(\frac{11}{16}\right)^2=\frac{67}{1280}$.

c. Din condiția $\int_0^2 f(x)dx=1$ rezultă că:

$$\int_0^1 a^2x^3dx+\int_1^2\frac{ax}{2}dx=1\Rightarrow a^2\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^1+a\cdot\frac{x^2}{4}\Big|_1^2=1\Rightarrow$$

Scanned with CamScanner

$$\Rightarrow \frac{a^2}{4} + \frac{3a}{4} = 1 \Rightarrow a^2 + 3a - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 4 \end{cases}$$

Cum $f(x) \geq 0$ numai a=1 convine, astfel că:

$$M(\xi) = \int_0^2 x \cdot f(x)dx = \int_0^1 x \cdot x^3 dx + \int_1^2 x \cdot \frac{x}{2} = \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 + \frac{x^3}{6}\Big|_1^2 = \frac{1}{5} + \frac{7}{6} = \frac{41}{30}$$

$$M(\xi^2) = \int_0^2 x^2 \cdot f(x)dx = \int_0^1 x^2 \cdot x^3 dx + \int_1^2 x^2 \cdot \frac{x}{2} =$$

$$= \frac{x^6}{6}\Big|_0^1 + \frac{x^4}{8}\Big|_1^2 = \frac{1}{6} + 2 - \frac{1}{8} = \frac{49}{24},$$

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - M(\xi)^2 = \frac{49}{24} - \left(\frac{41}{30}\right)^2 = \frac{313}{1800}.$$

4. *Fie ξ o variabilă aleatoare continuă cu densitatea de repartiție $f(x)$ și funcția de repartiție*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ ax^3 + dx, & x \in [0,1] \\ bx^2 + cx, & x \in (1,2] \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

Știind că funcția $F(x)$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$, să se calculeze $f(x)$, $M(\xi)$, $D^2(\xi)$.

Rezolvare:

Din continuitatea lui F avem

$$F_s(0) = F_d(0),\ F_s(1) = F_d(1),\ F_s(2) = F_d(2),$$

adică 0=0, $a + d = b + c,\ 4b + 2c = 1$. Derivând $F(x)$ avem

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 3ax^2 + d, & x \in (0,1) \\ 2bx + c, & x \in (1,2) \\ 0, & x > 2 \end{cases}.$$

Scanned with CamScanner

Pentru ca f să fie continuă trebuie ca

$$f_s(0) = f_d(0), f_s(1) = f_d(1), f_s(2) = f_d(2),$$

adică 0=0, $3a + b = 2b + c$ şi $4b + c = 0$. Rezultă

$$c = 1, b = -\frac{1}{4}, a + d = \frac{3}{4}, 3a + d = \frac{1}{2},$$

de unde $a = -\frac{1}{8}, d = \frac{7}{8}$.

Astfel $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ sau } x > 2 \\ -\frac{3}{8}x^2 + \frac{7}{8}, & x \in [0,1] \\ -\frac{x}{2} + 1, & x \in [1,2] \end{cases}$. Prin urmare

$$M(\xi) = \int_0^1 x\left(\frac{7}{8} - \frac{3x^2}{8}\right)dx + \int_1^2 x\left(1 - \frac{x}{2}\right)dx = \frac{7}{16} - \frac{3}{32} + \frac{3}{2} - \frac{7}{6} = \frac{65}{32},$$

$$M(\xi) = \int_0^1 x^2\left(\frac{7}{8} - \frac{3x^2}{8}\right)dx + \int_1^2 x^2\left(1 - \frac{x}{2}\right)dx = \frac{7}{24} - \frac{3}{40} + \frac{7}{3} - \frac{15}{8} = \frac{27}{40},$$

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - M(\xi)^2 = \frac{27}{40} - \left(\frac{65}{32}\right)^2.$$

5. *Dacă ξ este o variabilă aleatoare având densitatea de repartiţie*

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}.$$

Să se calculeze coeficienţii de asimetrie şi exces ai lui ξ.

Rezolvare:

Avem

$$M(\xi) = \int_0^1 x \cdot 2x dx = \frac{2}{3}, \mu_2(\xi) = M[(\xi - M(\xi))^2] =$$

Scanned with CamScanner

$$= M\left[\left(\xi - \frac{2}{3}\right)^2\right] = \int_0^1 \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 \cdot 2x dx = \frac{1}{8},$$

$$\mu_3(\xi) = M[(\xi - M(\xi))^3] = \int_0^1 \left(x - \frac{2}{3}\right)^3 \cdot 2x dx = -\frac{1}{135},$$

$$\mu_4(\xi) = \frac{1}{135}.$$

Deci $A = \dfrac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = -\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$, $E = \dfrac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 = -\dfrac{3}{5}$.

6. *Probabilitatea de apariţie a unui eveniment A în fiecare probă este 0,5. Să se calculeze probabilitatea ca numărul de apariţii ale evenimentului A în 150 de experimente independente să fie cuprins între 40 şi 60.*

Rezolvare:

Fie ξ variabila aleatoare reprezentând numărul de apariţii ale evenimentului A în 150 de probe independente şi ξ_i variabila aleatoare reprezentând numărul de apariţii ale evenimentului A în proba numărul i, $1 \le i \le 150$. Evident $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_{150}$ şi $\xi_i : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, 1 \le i \le 150$. Rezultă că

$$M(\xi_i) = \frac{1}{2} \text{ şi } D^2(\xi_i) = M(\xi_i^2) - M(\xi_i)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4},$$

de unde

$$M(\xi) = M(\xi_1) + M(\xi_2) + \ldots + M(\xi_{150}) = 150 \cdot \frac{1}{2} = 75$$

şi

$$D^2(\xi) = D^2(\xi_1) + D^2(\xi_2) + \ldots + D^2(\xi_{150}) = 150 \cdot \frac{1}{4} = \frac{75}{2}.$$

Utilizând inegalitatea lui Cebâşev pentru ε=10 avem

$$P(|\xi - 50| < 10) \ge 1 - \frac{75/2}{10^2} = \frac{5}{8} = 0,625.$$

Scanned with CamScanner

14.3. Exerciții propuse

1. *Fie variabila aleatoare* $\xi: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/6 & 1/12 \end{pmatrix}$. *Să se afle a şi b astfel încât variabila* $\eta = a\xi + b$ *să aibă media 14 şi dispersia 35.*

2. *Fie variabilele independente* $\xi: \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1/3 & p & q \end{pmatrix}$, $\eta: \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 2 \\ 1/3 & 2/3-q & p \end{pmatrix}$.

   Să se calculeze a astfel încât $D^2(\xi - \eta) = \dfrac{4}{9}$.

3. *Să se calculeze valoarea medie pentru următoarele variabile aleatoare:*

$$\xi: \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ \dfrac{1}{2^{n-1}} & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2^2} & \dfrac{1}{2^3} & \cdots & \dfrac{1}{2^{n-1}} \end{pmatrix}, \eta: \begin{pmatrix} \dfrac{1}{1\cdot 2} & \dfrac{1}{2\cdot 3} & \cdots & \dfrac{1}{n(n+1)} \\ \dfrac{1}{n} & \dfrac{1}{n} & \cdots & \dfrac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

4. *Se aruncă o monedă de 36 ori. Să se calculeze valoarea medie şi dispersia numărului de apariţii ale stemei.*

5. *Se aruncă două zaruri. Se acordă 12 puncte dacă suma feţelor care apar este 2 sau 12, 4 puncte dacă această sumă este 7 şi 1 punct în celelalte cazuri. Să se scrie repartiţia numărului de puncte acordat celui care aruncă zarul, media şi dispersia acestei variabile aleatoare.*

6. *Se dau variabilele aleatoare independente*

$$\xi: \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ p+\dfrac{1}{6} & q+\dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}, \eta: \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ \dfrac{1}{3} & 2p-q & 12p^2 \end{pmatrix}, a \neq \{0,1\}.$$

   Să se scrie repartiţia variabilei $\xi+\eta$ *şi să se determine a astfel încât* $D^2(\eta) = \dfrac{2}{3}$. *Să se verifice că*

$$M(\xi+\eta) = M(\xi) + M(\eta) \quad \text{şi} \quad D^2(\xi+\eta) = D^2(\xi) + D^2(\eta).$$

Scanned with CamScanner

7. *Fie ξ şi η două variabile aleatoare ale căror repartiţii comune şi marginale sunt date de tabelele:*

a.

$\xi \backslash \eta$	-2	-1	p_i
1	1/3	1/3	2/3
2	1/6	1/6	1/3
q_j	1/2	1/2	1

b.

$\xi \backslash \eta$	-1	1	p_i
0	1/4	1/2	3/4
1	1/8	1/8	1/4
q_j	3/8	5/8	1

c.

$\xi \backslash \eta$	0	2	p_i
-1	1/4	1/4	1/2
1	1/4	1/4	1/2
q_j	1/2	1/2	1

Să se calculeze $M(\xi+\eta)$ şi $M(\xi\eta)$ şi să se precizeze dacă variabilele sunt independente. Să se calculeze $M(\xi)\cdot M(\eta)$.

8. *Fie ξ şi η două variabile aleatoare ale căror repartiţii sunt date de tabelul:*

$\xi \backslash \eta$	x	$x+1$	$x+2$	$x+3$	p_i
-1	α	1/8	1/8		7/16
1			1/16		
q_j	1/4	1/4			

Să se determine x şi α ştiind că $M(\eta)=\dfrac{9}{16}$ *şi* $M(\xi\eta)=\dfrac{5}{16}$.

9. *Să se determine parametrul a şi apoi să se calculeze $M(\xi)$, $D^2(\xi)$, A şi E.*

a. $\xi:\begin{pmatrix} x \\ a\,|x| \end{pmatrix}, a\in\mathbb{R}, x\in[-1,1]$;

Scanned with CamScanner

b. $\xi:\begin{pmatrix} x \\ ax^2 \end{pmatrix}, a\in\mathbb{R}, x\in[0,1]$;

c. $\xi:\begin{pmatrix} x \\ a\sin x \end{pmatrix}, a\in\mathbb{R}, x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$;

d. $\xi:\begin{pmatrix} x \\ \dfrac{a}{1+x^2} \end{pmatrix}, a\in\mathbb{R}, x\in[0,1]$;

e. $\xi:\begin{pmatrix} x \\ ae^{-|x|} \end{pmatrix}, a\in\mathbb{R}, x\in\mathbb{R}$;

f. $\xi:\begin{pmatrix} x \\ \dfrac{a}{\sqrt{1-x^2}} \end{pmatrix}, a\in\mathbb{R}, x\in(1,1)$.

7. *Fie ξ o variabilă aleatoare discretă cu repartiția*

$$\xi:\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Utilizând inegalitatea lui Cebâşev să se estimeze probabilitatea ca $|\xi-M(\xi)|<0{,}2$.

14.4. Indicații şi răspunsuri

1. $a=6$, $b=3$ sau $a=-6$, $b=25$.

2. $a=1$.

3. $M(\xi)=3-\dfrac{n+2}{2^{n-1}}$, $M(\eta)=\dfrac{1}{n+1}$.

4. $M(\xi)=18$, $D^2(\xi)=9$.

5. $\xi:\begin{pmatrix} 1 & 4 & 12 \\ 7/9 & 1/6 & 1/18 \end{pmatrix}, M(\xi)=\dfrac{19}{9}, D^2(\xi)=\dfrac{566}{81}$.

Scanned with CamScanner

6. $a=-1, \xi+\eta: \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1/9 & 2/9 & 1/3 & 2/9 & 1/9 \end{pmatrix}$ sau

$a=2, \xi+\eta: \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1/9 & 2/9 & 1/3 & 2/9 & 1/9 \end{pmatrix}$.

7. **a.** $M(\xi+\eta)=M(\xi)+M(\eta)=-\frac{1}{6}$, $M(\xi\eta)=M(\xi)M(\eta)=-2$, independente;

b. $M(\xi+\eta)=\frac{1}{2}$, $M(\xi)M(\eta)=\frac{1}{16}$, $M(\xi\eta)=0$, dependente;

c. $M(\xi+\eta)=1$, $M(\xi\eta)=0$, independente, $M(\xi)M(\eta)=0$.

8. $x=-1, \alpha=\frac{1}{12}$.

9. **a.** $a=1, M(\xi)=0, D^2(\xi)=\frac{1}{2}, A=0, E=-\frac{7}{5}$;

b. $a=3, M(\xi)=\frac{3}{4}, D^2(\xi)=\frac{3}{80}, A=-\frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$;

c. $a=1, M(\xi)=1, D^2(\xi)=\pi-3$;

d. $a=\frac{4}{\pi}, M(\xi)=\frac{2\ln 2}{\pi}, D^2(\xi)=1-\frac{\pi}{4}-\frac{4\ln^2 2}{\pi^2}$;

e. $a=\frac{1}{2}, M(\xi)=0, D^2(\xi)=2, A=0, E=3$;

f. $a=\frac{1}{\pi}, M(\xi)=-0, D^2(\xi)=\frac{1}{2}, A=0$.

10. $M(\xi)=0{,}4, D^2(\xi)=0{,}01, P(|\xi-0{,}4|<0{,}2)\geq 1-0{,}25=0{,}75$.

Scanned with CamScanner

15. VECTORI ALEATORI. CORELAȚIE

15.1. Considerații teoretice

A. VECTORI ALEATORI

Definiția 1. Fie (Ω,K,P) un câmp borelian de probabilitate. Se numeşte ***variabilă aleatoare n-dimensională*** sau ***vector aleator n-dimensional*** o funcție $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n):\Omega\to\mathbb{R}^n$ cu proprietatea

$$\{\omega\in\Omega \mid \xi(\omega)<x\}=\{\omega\in\Omega \mid \xi_1(\omega)<x_1,\ldots,\xi_n(\omega)<x_n\}\in K,$$
$$\forall x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$$

Definiția 2. Fie $\theta=(\xi,\eta)$ o variabilaă aleatoare cu 2 dimensiuni. Funcția

$$F:\mathbb{R}^2\to[0,1],\ F(x,y)=P(\{\omega\in\Omega \mid \xi(\omega)<x,\eta(\omega)<y\})$$

se numeşte ***funcție de repartiție*** a variabilei aleatoare θ.

Teorema 1. (*Proprietăți ale funcției de repartiție*)

1. *F este nedescrescătoare în fiecare argument;*
2. *F este continuă la stânga în raport cu fiecare argument;*
3. $F(x,-\infty)=F(-\infty,y)=F(-\infty,-\infty)=0, \forall x,y\in\mathbb{R}$;
4. $F(x,\infty)=F_\xi(x), F(\infty,y)=F_\eta(y)$, *unde* $F_\xi(x),F_\eta(y)$ *sunt funcțiile de repartiție ale variabilelor* ξ *și* η;
5. $F(\infty,\infty)=1$;
6. $P(\theta\in[a,b)\times[c,d))=F(b,d)-F(a,d)-F(b,c)+F(a,c)$.

Definiția 3. Dacă există o funcție reală f definită şi integrabilă pe $\mathbb{R}^2$ astfel încât

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv$$

Scanned with CamScanner

atunci f se numeşte ***densitate de repartiţie*** (***de probabilitate***) a variabilei aleatoare bidimensionale $\theta=(\xi,\eta)$.

Teorema 2. (*Proprietăţi ale densităţii de repartiţie*)

1. $f(x,y)=F''_{xy}(x,y)$;

2. $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy=1$;

3. $P(\theta\in D\subset\mathbb{R}^2)=\iint_D f(x,y)dxdy$;

4. $f(x,y)\geq 0, \forall x,y\in\mathbb{R}$.

Teorema 3. *Dacă ξ şi η sunt independente şi admit fiecare o densitate de probabilitate $f_\xi(x)$ şi $f_\eta(y)$ atunci*

$$f(x,y)=f_\xi(x)\cdot f_\eta(y)$$

$$F(x,y)=F_\xi(x)\cdot F_\eta(y).$$

B. CORELAŢIE

Definiţia 1. Fie o variabilă aleatoare bidimensională $\theta=(\xi,\eta)$. Se numeşte ***moment iniţial de ordin (k,s) al lui θ*** şi se notează $\alpha_{k,s}$, valoarea medie a produsului $\xi^k\eta^s$

$$\alpha_{k,s}=M(\xi^k\eta^s).$$

Se numeşte ***moment centrat de ordinul (k,s) al lui θ*** şi se notează cu $\mu_{k,s}$ numărul

$$\mu_{k,s}=M[(\xi-M(\xi))^k(\eta-M(\eta))^s].$$

Teorema 1. *Pentru o variabilă θ discretă avem*

$$\alpha_{k,s}=\sum_i\sum_j x_i^k y_j^s \Pi_{ij}$$

$$\mu_{k,s}=\sum_i\sum_j (x_i-M(\xi))^k(y_j-M(\eta))^s\Pi_{ij},$$

Scanned with CamScanner

iar pentru o variabilă θ continuă avem

$$\alpha_{k,s} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^k y^s f(x,y)dxdy$$

$$\mu_{k,s} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(\xi))^k (y - M(\eta))^s f(x,y)dxdy.$$

Definiția 2. Fie θ=(ξ,η) o variabilă aleatoare bidimensională. Se numește ***corelație*** sau ***covarianță*** a variabilelor aleatoare ξ și η și se notează cu cov(ξ,η), numărul (dacă există)

$$\text{cov}(\xi,\eta) = M[(\xi - M(\xi))(\eta - M(\eta))] = \mu_{1,1}.$$

Teorema 2. (*Proprietăți*)

1. $\text{cov}(\xi,\eta) = M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta)$;
2. $\text{cov}(\xi,\eta) = \text{cov}(\eta,\xi)$;
3. $\text{cov}(\xi,\xi) = D^2(\xi)$;
4. $\text{cov}\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\xi_i, \sum_{j=1}^{n} b_j\eta_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j \,\text{cov}(\xi_i,\eta_j)$;
5. $-D(\xi)D(\eta) \le \text{cov}(\xi,\eta) \le D(\xi)D(\eta)$;
6. *Dacă* ξ *și* η *sunt independente, atunci* cov(ξ,η)=0, *dar nu și reciproc.*

Definiția 3. Se numește ***coeficient de corelație*** al variabilelor aleatoare ξ și η raportul (dacă există)

$$r_{\xi,\eta} = \frac{\text{cov}(\xi,\eta)}{D(\xi)D(\eta)}.$$

Teorema 3. (*Proprietăți*)

1. $r_{\xi,\eta} = r_{\eta,\xi}$.
2. *Dacă* ξ *și* η *sunt independente, atunci* $r_{\xi,\eta} = 0$, *dar nu și reciproc.*

Scanned with CamScanner

3. $-1 \le r_{\xi,\eta} \le 1$.

4. $r_{a\xi+b,c\eta+d} = r_{\xi,\eta}$ *dacă ac>0 şi* $r_{a\xi+b,c\eta+d} = -r_{\xi,\eta}$ *dacă ac<0.*

5. *Dacă* $r^2_{\xi,\eta} = 1$ *atunci între* ξ *şi* η *există o dependenţă liniară* ($\eta=a\xi+b$) *şi reciproc.*

Definiţia 4. Se numesc ***drepte de regresie*** ale variabilelor aleatoare ξ, η dreptele

$$\frac{x - M(\xi)}{D^2(\xi)} = \text{cov}(\xi,\eta)\frac{y - M(\eta)}{D^2(\eta)},$$

$$\frac{y - M(\eta)}{D^2(\eta)} = \text{cov}(\xi,\eta)\frac{x - M(\xi)}{D^2(\xi)}.$$

15.2. Exerciţii rezolvate

1. *Fie variabila aleatoare* $\theta=(\xi,\eta)$ *cu* ξ, η *variabile aleatoare independente, a cărei densitate de probabilitate este*

$$f(x,y) = \frac{a}{(1+x^2)(1+y^2)}.$$

Să se determine:

a. *funcţia de repartiţie corespunzătoare*;

b. $P((\xi,\eta) \in [0,1) \times [0,1))$.

Rezolvare:

a. Avem $\iint\limits_{\mathbf{R}^2} f(x,y)dxdy = 1$, deci $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{(1+x^2)(1+y^2)} dxdy = 1$. Rezultă că

$$a\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} = 1 \Rightarrow a \cdot \text{arctg}x\Big|_{-\infty}^{+\infty} \cdot \text{arctg}y\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\pi^2 = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{\pi^2}.$$

Atunci

Scanned with CamScanner

$$F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\frac{dudv}{(1+u^2)(1+v^2)}=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{x}\frac{du}{1+u^2}\int_{-\infty}^{y}\frac{dv}{1+v^2}=$$

$$=\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}y+\frac{1}{2}\right)$$

b. $$P((\xi,\eta)\in D)=\frac{1}{\pi^2}\int_0^1\int_0^1\frac{dudv}{(1+u^2)(1+v^2)}=$$

$$=F(1,1)-F(1,0)-F(0,1)+F(0,0)=\frac{1}{16}.$$

2. *Fie variabila aleatoare* $\theta=(\xi,\eta)$ *cu densitatea de repartiție*

$$f(x,y)=\begin{cases}ax^2y, & (x,y)\in[0,1]\times[0,2]\\ 0, & \text{în rest.}\end{cases}$$

a. *Să se determine constanta a.*

b. *Să se calculeze funcția de repartiție F(x,y) și funcțiile de repartiție marginale* $F_\xi(x)$ *și* $F_\eta(y)$.

Rezolvare:

a. Avem $\int_0^1\int_0^2 f(x,y)dxdy=1$, adică $a\int_0^1 x^2dx\int_0^2 ydy=1$. Rezultă că $\frac{2a}{3}=1$ de unde $a=\frac{3}{2}$.

b. Avem $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(x,y)dxdy$.

Dacă $x<0$ sau $y<0$, atunci $f(x,y)=0$ și deci $F(x,y)=0$.

Dacă $x>1$ și $y>2$, atunci $F(x,y)=1$.

Dacă $(x,y)\in[0,1]\times[0,2]$ avem

$$F(x,y)=\int_0^x\int_0^y\frac{3}{2}u^2vdudv=\frac{3}{2}\int_0^x u^2du\int_0^y vdv=\frac{x^3y^2}{4}.$$

Dacă $x\in[0,1]$ și $y>2$ avem

Scanned with CamScanner

$$F(x,y)=\int_0^x\int_0^2\frac{3}{2}u^2v\,du\,dv=\frac{3}{2}\int_0^x u^2du\int_0^2 v\,dv=x^3.$$

Dacă $x>1$ şi $y\in[0,2]$ obţinem

$$F(x,y)=\int_0^1\int_0^y\frac{3}{2}u^2v\,du\,dv=\frac{3}{2}\int_0^1 u^2du\int_0^y v\,dv=\frac{y^2}{4}.$$

Astfel

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0 \text{ sau } y<0\\ \dfrac{x^3y^2}{4}, & (x,y)\in[0,1]\times[0,2]\\ x^3, & x\in[0,1],\ y>2\\ \dfrac{y^2}{4}, & x>1,\ y\in[0,2]\\ 1, & x>1,\ y>2\end{cases}$$

Funcţiile de repartiţie marginale sunt

$$F_\xi(x)=F(x,\infty)=\begin{cases}0, & x<0\\ x^3, & x\in[0,1]\\ 1, & x>1\end{cases}$$

$$F_\eta(y)=F(\infty,y)=\begin{cases}0, & y<0\\ \dfrac{y^2}{4}, & y\in[0,2]\\ 1, & y>2\end{cases}$$

3. *Fie ξ şi η două variabile aleatoare având densitatea de repartiţie*

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-(x+y)}, & x\ge 0 \text{ si } y\ge 0\\ 0, & \text{in rest}\end{cases}$$

Să se calculeze:

a. $P(\xi<1,\eta<1), P(\xi+\eta<1), P(\xi+\eta\ge 2),$

$P(\xi\ge 1\,|\,\eta\ge 1), P(\xi<2\eta), P(\xi=\eta)$.

Scanned with CamScanner

b. *funcția de repartiție F(x,y) și funcțiile de repartiție marginale* $F_\xi(x), F_\eta(y)$;

c. *densitățile de repartiție marginale* $f_\xi(x), f_\eta(y)$;

d. *momentele inițiale de diferite ordine*;

e. *corelația variabilelor* ξ *și* η.

Rezolvare:

a.

$$P(\xi<1,\eta<1)=\int_{-\infty}^{1}\int_{-\infty}^{1} f(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^1 e^{-x-y}dxdy=$$

$$=(-e^{-x})\Big|_0^1(-e^{-y})\Big|_0^1=(1-e^{-1})^2,$$

$$P(\xi+\eta<1)=\iint_{x+y<1} f(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^{1-x} e^{-x-y}dxdy=\int_0^1 e^{-x}(-e^{-y})\Big|_0^{1-x}dx=$$

$$=\int_0^1(e^{-x}-e^{-1})dx=(-e^{-x})\Big|_0^1-e^{-1}=1-2e^{-1},$$

$$P(\xi+\eta\geq 2)=1-P(\xi+\eta<2)=1-\iint_{x+y<2} f(x,y)dxdy=$$

$$=1-\int_0^2\int_0^{2-x} e^{-x-y}dxdy=1-\int_0^2 e^{-x}(e^{-y})\Big|_0^{2-x}dx=$$

$$=1-\int_0^2(e^{-x}-e^{-2})dx=1+e^{-x}\Big|_0^2+2e^{-2}=3e^{-2}$$

$$\left.\begin{aligned}
&P(\xi\geq 1|\eta\geq 1)=\frac{P(\xi\geq 1,\eta\geq 1)}{P(\eta\geq 1)}\\
&P(\xi\geq 1,\eta\geq 1)=\int_1^\infty\int_1^\infty e^{-x-y}dxdy=\left(\int_1^\infty e^{-x}\right)^2=\left((-e^{-x})\Big|_1^\infty\right)^2=e^{-2}\\
&P(\eta\geq 1)=\int_0^\infty\int_1^\infty e^{-x-y}dxdy=-e^{-x}\Big|_0^\infty(-e^{-y})\Big|_1^\infty=e^{-1}
\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow P(\xi\geq 1,\eta\geq 1)=e^{-1}$$

$$P(\xi<2\eta)=\iint_{0<x<2y} e^{-x-y}dxdy=\int_0^\infty\int_0^{\frac{x}{2}} e^{-x}e^{-y}dydx=$$

Scanned with CamScanner

$$=\int_0^\infty e^{-x}(-e^{-y})\Big|_0^{x/2}dx=$$

$$=\int_0^\infty (e^{-x}-e^{-\frac{3x}{2}})dx=\left(-e^{-x}+\frac{2}{3}e^{-\frac{3x}{2}}\right)\Bigg|_0^\infty=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3},$$

$P(\xi=\eta)=0$.

b. Avem $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv$.

Dacă $x>0$ sau $y<0$ $f(x,y)=0$, deci $F(x,y)=0$.

Dacă $x\geq 0$ şi $y\geq 0$ avem

$$F(x,y)=\int_0^x\int_0^y e^{-u-v}dudv=\int_0^x e^{-u}du\int_0^y e^{-v}dv=(1-e^{-x})(1-e^{-y}).$$

Funcţiile de repartiţie marginale sunt

$$F_\xi(x)=F(x,\infty)=1-e^{-x}\text{ şi }F_\eta(y)=(\infty,y)=1-e^{-y}.$$

c. Densităţile de repartiţie marginale $f_\xi(x)$ şi $f_\eta(y)$ sunt derivatele funcţiilor de repartiţie marginale:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ e^{-x}, & x\geq 0\end{cases},\ f_\eta(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ e^{-y}, & y\geq 0\end{cases}$$

d. $$\alpha_{k,s}=M(\xi^k\eta^s)=\int_0^\infty\int_0^\infty x^k y^s e^{-x-y}dxdy=$$

$$=\int_0^\infty x^k e^{-x}dx\int_0^\infty y^s e^{-y}dy=\Gamma(k+1)\Gamma(s+1)=k!s!,$$

unde $\Gamma(p)=\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$ este funcţia gama a lui Euler şi are proprietatea că $\Gamma(p+1)=p!$ pentru $p\in\mathbb{N}$.

e. Avem

$$\text{cov}(\xi,\eta)=M(\xi\eta)-M(\xi)M(\eta)=\alpha_{11}-\int_0^\infty xe^{-x}dx\int_0^\infty ye^{-y}dy=.$$

$$=1-\Gamma(2)^2=1-1=0$$

Scanned with CamScanner

4. *Fie θ=(ξ,η) un vector aleator discret a cărui repartiție probabilistă este dată în tabelul de mai jos. Să se calculeze coeficientul de corelație $r_{\xi,\eta}$ și să se scrie ecuațiile dreptelor de regresie.*

$\xi \backslash \eta$	−1	0	1	2	p_i
−1	1/10	1/5	1/10	0	2/5
0	1/20	0	1/10	1/20	1/5
1	1/10	1/10	1/20	3/20	2/5
q_j	1/4	3/10	1/4	1/5	1

Rezolvare:

Pe baza formulelor corespunzătoare, deducem imediat:

$$M(\xi) = -1\cdot\frac{2}{5}+0\cdot\frac{1}{5}+1\cdot\frac{2}{5}=0,\; M(\eta) = -1\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{3}{10}+1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{5}=\frac{2}{5},$$

$$M(\xi^2) = (-1)^2\cdot\frac{2}{5}+0^2\cdot\frac{1}{5}+1^2\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{5},$$

$$M(\eta^2) = (-1)^2\cdot\frac{1}{4}+0^2\cdot\frac{3}{10}+1^2\cdot\frac{1}{4}+2^2\cdot\frac{1}{5}=\frac{13}{10},$$

$$D^2(\xi) = M(\xi^2)-M(\xi^2)=\frac{4}{5},\; D^2(\eta) = M(\eta^2)-M(\eta^2)=\frac{13}{10}-\frac{4}{25}=\frac{57}{50},$$

$$M(\xi\eta) = (-1)\cdot(-1)\cdot\frac{1}{10}+(-1)\cdot 0\cdot\frac{1}{5}+(-1)\cdot 1\cdot\frac{1}{10}+$$

$$+(-1)\cdot 2\cdot 0+0\cdot(-1)\cdot\frac{1}{20}+0\cdot 0\cdot 0+0\cdot 1\cdot\frac{1}{10}+0\cdot 2\cdot\frac{1}{20}+$$

$$+1\cdot(-1)\cdot\frac{1}{10}+1\cdot 0\cdot\frac{1}{10}+1\cdot 1\cdot\frac{1}{20}+1\cdot 2\cdot\frac{3}{20}=\frac{1}{4},$$

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = M(\xi\eta)-M(\xi)M(\eta)=\frac{1}{4},$$

$$r_{\xi,\eta} = \frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{D(\xi)D(\eta)} = \frac{0{,}25}{\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{57}}{\sqrt{50}}}.$$

Ecuațiile dreptelor de regresie sunt:

Scanned with CamScanner

$$\frac{x-0}{\frac{4}{5}} = +0{,}25 \cdot \frac{y-\frac{2}{5}}{\frac{57}{50}},$$

$$\frac{y-\frac{2}{5}}{\frac{57}{50}} = +0{,}25 \cdot \frac{x-0}{\frac{4}{5}}.$$

5. *Fie variabilele aleatoare discrete* $\xi\colon\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, $\eta\colon\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$. *Se cere să se calculeze:*

a. $P(\xi=-1,\eta=2)$, $P(\xi=1,\eta=-1)$, $P(\xi=1,\eta=2)$ dacă

$$P(\xi=-1,\eta=-1)=\lambda\,;$$

b. *Coeficientul de corelație în funcție de* λ;

c. *Valorile lui* λ *pentru care* ξ *și* η *sunt independente.*

Rezolvare:

a. Avem

$$P(\xi=-1,\eta=2)+P(\xi=-1,\eta=-1)=P(\xi=-1),$$

$$P(\xi=1,\eta=-1)+P(\xi=-1,\eta=-1)=P(\eta=-1),$$

$$P(\xi=1,\eta=2)+P(\xi=1,\eta=-1)=P(\xi=1),$$

de unde

$$P(\xi=-1,\eta=2)=\frac{1}{2}-\lambda,$$

$$P(\xi=1,\eta=-1)=\frac{2}{3}-\lambda,$$

$$P(\xi=1,\eta=2)=\lambda-\frac{1}{6}.$$

Avem următorul tablou de repartiție:

Scanned with CamScanner

$\xi \backslash \eta$	-1	2	p_i
-1	λ	$\frac{1}{2}-\lambda$	$1/2$
1	$\frac{2}{3}-\lambda$	$\lambda-\frac{1}{6}$	$1/2$
q_j	$2/3$	$1/3$	1

şi

$$M(\xi\eta)=(-1)\cdot(-1)\cdot\lambda+(-1)\cdot 2\cdot\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)+$$

$$+1\cdot(-1)\cdot\left(\frac{2}{3}-\lambda\right)+1\cdot 2\cdot\left(\lambda-\frac{1}{6}\right)=6\lambda-2,$$

$$M(\xi)=-1\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}=0,\ M(\eta)=-1\cdot\frac{2}{3}+2\cdot\frac{1}{3}=0,$$

$$M(\xi^2)=1\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}=1,\ M(\eta^2)=1\cdot\frac{2}{3}+4\cdot\frac{1}{3}=2,$$

$$D^2(\xi)=1,\ D^2(\eta)=2.$$

λ trebuie ales astfel încât $\Pi_{ij}\geq 0$, adică $\lambda\geq 0, \begin{cases}\frac{1}{2}-\lambda\geq 0\\ \frac{2}{3}-\lambda\geq 0\\ \lambda-\frac{1}{6}\geq 0\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{6}\leq\lambda\leq\frac{1}{2}.$

b. Avem

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta)=M(\xi\eta)-M(\xi)M(\eta)=6\lambda-2$$

şi

$$r_{\xi,\eta}=\frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{D(\xi)D(\eta)}=\frac{6\lambda-2}{\sqrt{2}}.$$

Cum $\frac{1}{6}\leq\lambda\leq\frac{1}{2}$ rezultă $-1\leq 6\lambda-2\leq 1$, adică $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leq r_{\xi,\eta}\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$.

c. Dacă ξ şi η sunt independente avem $\Pi_{ij}=p_i q_j$, adică

$$\lambda=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3},\ \frac{1}{2}-\lambda=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}-\lambda=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3},\ \lambda-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}.$$

Scanned with CamScanner

Rezultă $\lambda = \frac{1}{6}$.

6. *Fie* $\theta=(\xi,\eta)$ *un vector aleator continuu cu densitatea de repartiție*

$$f(x,y)=\begin{cases} a(xy+y^2), & x\in[0,1]\times[0,1] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}, \quad a>0.$$

Rezolvare:

a. Avem $\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy = 1$, adică $\int_0^1\int_0^1 a(xy+y^2)dxdy = 1$. Rezultă că

$$a\int_0^1\left(\frac{xy^2}{2}+\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1 dx = 1,\ a\int_0^1\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\right)dx = 1,$$

$$a\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{3}\right)\Big|_0^1 = 1,\ a\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right) = 1,\ a = \frac{12}{7}.$$

Avem

$$f_\xi(x) = \int_0^1 f(x,y)dy = \int_0^1 \frac{12}{7}(xy+y^2)dy = \frac{12}{7}\left(\frac{xy^2}{2}+\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{12}{7}\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\right) = \frac{2(3x+2)}{7},\ x\in[0,1]$$

$$f_\eta(x) = \int_0^1 f(x,y)dx = \int_0^1 \frac{12}{7}(xy+y^2)dy = \frac{12}{7}\left(\frac{x^2y}{2}+xy^2\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{12}{7}\left(\frac{y}{2}+y^2\right) = \frac{6}{7}(2y^2+y),\ y\in[1,2]$$

În afara celor două intervale, $f_\xi(x)$ și respectiv $f_\eta(y)$ sunt egale cu 0.

$$M(\xi) = \int_0^1 x f_\xi(x)dx = \int_0^1 x\cdot\frac{2(3x+2)}{7}dx = \frac{2}{7}(x^3+x^2)\Big|_0^1 = \frac{4}{7},$$

$$M(\xi^2) = \int_0^1 x^2 f_\xi(x)dx = \int_0^1 x^2\cdot\frac{2(3x+2)}{7}dx = \frac{2}{7}\left(\frac{3x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{17}{42},$$

Scanned with CamScanner

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - M(\xi)^2 = \frac{17}{42} - \frac{16}{49} = \frac{23}{294}$$

$$M(\eta) = \int_0^1 y f_\eta(y)dy = \int_0^1 y \cdot \frac{6}{7}(2y^2 + y)dy = \frac{6}{7}\left(\frac{y^4}{2} + \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{5}{7},$$

$$M(\eta^2) = \int_0^1 y^2 f_\eta(y)dy = \int_0^1 y^2 \cdot \frac{6}{7}(2y^2 + y)dy = \frac{6}{7}\left(\frac{2y^5}{5} + \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{39}{70},$$

$$D^2(\eta) = M(\eta^2) - M(\eta)^2 = \frac{39}{70} - \frac{25}{49} = \frac{23}{490}$$

$$\text{cov}(\xi,\eta) = M[(\xi - M(\xi))(\eta - M(\eta))] =$$

$$= \int_0^1\int_0^1 \left(x - \frac{4}{7}\right)\left(y - \frac{5}{7}\right) \cdot \frac{12}{7}(xy + y^2)dxdy =$$

$$= \frac{12}{7}\int_0^1 \left(x - \frac{4}{7}\right)\left[\int_0^1 \left(xy^2 + y^3 - \frac{5}{7}xy - \frac{5}{7}y^2\right)dy\right]dx =$$

$$= \frac{12}{7}\int_0^1 \left(x - \frac{4}{7}\right)\left(\frac{xy^3}{3} + \frac{y^4}{4} - \frac{5}{7}x\frac{y^2}{2} - \frac{5}{7}\cdot\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 dx =$$

$$= \frac{12}{7}\int_0^1 \left(x - \frac{4}{7}\right)\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{4} - \frac{5x}{14} - \frac{5}{21}\right)dx =$$

$$= \frac{12}{7}\int_0^1 \left(x - \frac{4}{7}\right)\left(-\frac{x}{42} + \frac{1}{84}\right)dx = \frac{12}{7}\int_0^1 \left(-\frac{x^2}{42} + \frac{5}{196}x - \frac{1}{147}\right)dx =$$

$$= \frac{12}{7}\left(-\frac{x^3}{126} + \frac{5x^2}{392} - \frac{x}{147}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{12}{7}\left(\frac{5}{392} - \frac{1}{126} - \frac{1}{147}\right) = -\frac{1}{294},$$

$$r_{\xi,\eta} = \frac{\text{cov}(\xi,\eta)}{D(\xi)D(\eta)} = \frac{-\frac{1}{294}}{\sqrt{\frac{23}{294}}\sqrt{\frac{23}{490}}} = -\frac{1}{23}\sqrt{\frac{5}{3}}.$$

7. *Fie ξ şi η două variabile aleatoare pentru care*

$$M(\xi) = 1,\ M(\eta) = -2,\ D(\xi) = 4,\ D(\eta) = 3 \ \text{și}\ r_{\xi,\eta} = -\frac{1}{3}.$$

Să se calculeze $M(\theta)$ unde $\theta = 2\xi^2 + \xi\eta - \eta^2 + 2\xi - 3\eta + 1$.

Scanned with CamScanner

Rezolvare:

Deoarece $r_{\xi,\eta} = \dfrac{\mathrm{cov}(\xi,\eta)}{D(\xi)D(\eta)}$ rezultă $\mathrm{cov}(\xi,\eta) = -\dfrac{1}{3}\cdot 4\cdot 3 = -4$.

Dar $\mathrm{cov}(\xi,\eta) = M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta) = M(\xi\eta) - 1\cdot(-2) = M(\xi\eta)+2$.

Rezultă $M(\xi\eta) = -6$. Folosind proprietățile mediei avem:

$$\begin{aligned}
M(\theta) &= M(2\xi^2 + \xi\eta - \eta^2 + 2\xi - 3\eta + 1) = \\
&= 2M(\xi^2) + M(\xi\eta) - M(\eta^2) + 2M(\xi) - 3M(\eta) + 1 = \\
&= 2(D^2(\xi) + M(\xi)^2) + M(\xi\eta) - D^2(\eta) - \\
&\quad - M(\eta)^2 + 2M(\xi) - 3M(\eta) + 1 = \\
&= 2(4^2 + 1^2) + (-6) - 3^2 - (-2)^2 + 2\cdot 1 - 3\cdot(-2) + 1 = 24.
\end{aligned}$$

8. *Fie ξ și η două variabile aleatoare a căror repartiție comună este dată de densitatea*

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x,y \ge 0 \\ 0, & \text{în rest}. \end{cases}$$

Să se afle densitatea de repartiție a variabilelor $\theta=\xi+\eta$, $v=\xi/\eta$.

Rezolvare:

Punând $u = x + y$, $v = \dfrac{x}{y}$ găsim

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{1}{y} & -\dfrac{x}{y^2} \end{vmatrix} = -\frac{x+y}{y^2} = -\frac{u}{\left(\dfrac{u}{v+1}\right)^2} = -\frac{(v+1)^2}{u}.$$

Probabilitatea elementară pentru punctul (u,v) este

$$g(u,v)dudv = e^{-u}\cdot\frac{u}{(1+v)^2}dudv,\ 0 \le u,v.$$

Densitatea de repartiție a variabilei θ este

$$h(u) = \int_0^\infty e^{-u}\cdot\frac{u}{(1+v)^2}dv = -\frac{ue^{-u}}{1+v}\Big|_0^\infty = ue^{-u},$$

Scanned with CamScanner

8. *Repartiţia vectorului aleator (ξ,η) este dată de*

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{k(1+x+y)}{(1+x)^4(1+y)^4}, & x\geq 0, y\geq 0\\ 0, & \text{în rest}\end{cases}.$$

Se cere să se determine:

a. *constanta k;*

b. *repartiţiile marginale.*

9. *Fie ξ şi η două variabile aleatoare, a căror densitate de repartiţie bidimensională este dată de*

$$f_{\xi,\eta}=\begin{cases}4xy, & 0<x<1, 0<y<1\\ 0, & \text{în rest}\end{cases}.$$

Se cere să se determine densitatea de repartiţie corespunzătoare variabilelor ξ^2 şi η^2.

15.4. Indicaţii şi răspunsuri

1. **a.** $a=\dfrac{1}{2\pi}$, $F(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}e^y\left(\text{arctg}x+\dfrac{\pi}{2}\right), & y<0\\ \dfrac{1}{2\pi}(2-e^{-y})\left(\text{arctg}x+\dfrac{\pi}{2}\right), & y\geq 0\end{cases}$;

b. $P((\xi,\eta)\in[0,1)\times[0,1))=\dfrac{1-e^{-1}}{8}$.

2. **a.** $P(\xi<1,\eta<1)=(1-2e^{-1})^2$, $P(\xi+\eta<1)=1-\dfrac{8}{3e}$, $P(\xi+\eta\geq 2)=\dfrac{8}{3e}$,

$P(\xi\geq 1|\eta\geq 1)=\dfrac{2}{e}$, $P(\xi<2\eta)=\dfrac{7}{27}$;

b. $F(x,y)=\begin{cases}(1-xe^{-x}-e^{-x})(1-ye^{-y}-e^{-y}), & x,y\geq 0\\ 0, & \text{în rest}\end{cases}$,

Scanned with CamScanner

$$F_\xi(x) = F_\eta(y) = \begin{cases} 1 - xe^{-x} - e^{-x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases};$$

c. $f_\xi(x) = f_\eta(y) = \begin{cases} xe^{-x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases};$

d. $\alpha_{k,s} = (k+1)!(s+1)!$;

e. $\operatorname{cov}(\xi,\eta) = 0$.

3. $M(\theta) = \dfrac{77}{3}$.

4. **a.** $a=1$; **b.** $r_{\xi,\eta} = -\dfrac{1}{11}$.

5. **a.** $a = \dfrac{4}{5}, r_{\xi,\eta} = \dfrac{2}{27}$; **b.** $a = \dfrac{2}{3}, r_{\xi,\eta} \cong -0{,}08$.

6. $r_{\xi,\eta} = \dfrac{1}{\sqrt{105}}$, $\dfrac{x - \frac{3}{16}}{\frac{135}{256}} = \dfrac{9}{128} \cdot \dfrac{y - \frac{5}{8}}{\frac{63}{64}}$, $\dfrac{y - \frac{5}{8}}{\frac{63}{64}} = \dfrac{9}{128} \cdot \dfrac{x - \frac{3}{16}}{\frac{135}{256}}$.

7. **a.** $P(\xi = 0, \eta = 1) = \dfrac{1}{3} - \lambda$, $P(\xi = 1, \eta = -1) = \dfrac{1}{4} - \lambda$, $P(\xi = 1, \eta = 1) = \lambda + \dfrac{5}{12}$;

b. $r_{\xi,\eta} = \left(2\lambda + \dfrac{1}{3}\right)\sqrt{6}$; **c.** $\lambda = \dfrac{1}{12}$.

8. **a.** $k=9/2$; **b.** $F_\xi(x) = F_\eta(y) = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{2x+3}{(1+x)^4}$.

9. $f_{\xi^2} = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$, $f_{\eta^2}(y) = \begin{cases} 1, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$.

Scanned with CamScanner

16. FUNCȚIA CARACTERISTICĂ. FUNCȚIA GENERATOARE DE MOMENTE

16.1. Considerații teoretice

Definiția 1. Fie (Ω, K, P) un câmp borelian de probabilitate şi ξ o variabilă aleatoare a cărei funcție de repartiție este F. Se numeşte ***funcție caracteristică*** a variabilei aleatoare ξ aplicația $\varphi_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definită de relația $\varphi_\xi(t) = M(e^{it\xi})$.

Teorema 1. *Dacă ξ este o variabilă aleatoare discretă şi ia valorile $(x_k)_{k\in I}, I \subset \mathbb{N}^*$ cu probabilitățile $(p_k)_{k\in I}$ atunci $\varphi_\xi(t) = \sum_{k\in I} p_k e^{itx_k}$ iar dacă ξ este o variabilă aleatoare continuă cu densitatea de repartiție f, atunci $\varphi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)dx$.*

Teorema 2. (*Proprietăți*)

1. $\varphi(0) = 1$ şi $|\varphi(t)| \le 1, \forall t \in \mathbb{R}$;
2. $\varphi(t) = \overline{\varphi(t)}$;
3. *dacă* $\eta = a\xi + b, a, b \in \mathbb{R}$ *atunci* $\varphi_\eta(t) = e^{itb}\varphi_\xi(at)$;
4. *dacă ξ admite momente inițiale de orice ordin, atunci funcția caracteristică admite derivate de orice ordin şi are loc relația*

$$\alpha_r(\xi) = M_r(\xi) = M(\xi^n) = \frac{1}{i^r}\varphi_\xi^{(r)}(0);$$

5. *dacă* (ξ_j) *sunt variabile aleatoare independente în totalitate cu*

Scanned with CamScanner

funcțiile caracteristice $\varphi_{\xi_j}(t), 1 \le j \le m$, *atunci funcția caracteristică a variabilei aleatoare sumă* $\xi = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_m$ *este*

$$\varphi_\xi(t) = \varphi_1(t) \cdot \varphi_2(t) \cdot ... \cdot \varphi_m(t).$$

Formula de inversiune

Dacă $x_1 < x_2$ *sunt puncte de continuitate ale funcției de repartiție* $F(x)$ *a lui* ξ, *atunci are loc formula de inversiune*

$$F(x_2) - F(x_1) = \frac{1}{2\pi} \lim_{c \to \infty} \int_{-c}^{c} \frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{it} \varphi(t) dt.$$

Teorema 3. *Funcția de repartiție este unic determinată de funcția sa caracteristică.*

Teorema 4. *Dacă repartiția* $F(x)$ *admite densitatea de repartiție* $f(x)$ *atunci*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) e^{-itx} dt.$$

Definiția 2. Fie ξ o variabilă aleatoare. Se numește ***funcție generatoare de momente***, funcția $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de $G_\xi(t) = M(e^{t\xi})$.

Teorema 5. *Dacă* ξ *este o variabilă aleatoare discretă atunci* $G_\xi(t) = \sum_k e^{tx_k} p_k$, *iar dacă* ξ *este o variabilă aleatoare continuă atunci* $G_\xi(t) = \int_R e^{tx} f(x) dx$.

Teorema 6. (*Proprietăți*)

1. $G(0) = 1$;
2. *dacă* $\eta = a\xi + b, a, b \in \mathbb{R}$, *atunci* $G_\eta(t) = e^{tb} G_\xi(at)$;
3. *dacă* (ξ_j) *sunt independente în totalitate și au funcțiile generatoare* $G_j(t), 1 \le j \le m$, *atunci funcția generatoare a variabilei aleatoare sumă* $\xi = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_m$ *este* $G_\xi(t) = G_{\xi_1}(t) \cdot G_{\xi_2}(t) \cdot ... \cdot G_{\xi_m}(t)$;

Scanned with CamScanner

4. *dacă ξ admite momente iniţiale de orice ordin, atunci funcţia generatoare admite derivate de orice ordin în 0 şi*

$$G_{\xi}^{(r)}(0)=M(\xi^{r}), r\in\mathbb{N}^*.$$

16.2. Exerciţii rezolvate

1. *Să se determine funcţia caracteristică şi funcţia generatoare şi apoi să se calculeze, pornind de la acestea, momentele α_1 şi α_2, pentru următoarele variabile aleatoare:*

a. $\xi:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix};$

b. $\xi:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n & \dots \\ 1/2 & 1/4 & 1/8 & \dots & 1/2^{n+1} & \dots \end{pmatrix};$

c. $\xi:\begin{pmatrix} x \\ |x| \end{pmatrix}, x\in[-1,1];$

d. $\xi:\begin{pmatrix} x \\ e^{-x} \end{pmatrix}, x\geq 0.$

Rezolvare:

a. Avem

$$\varphi_{\xi}(t)=e^{0\cdot it}\cdot\frac{1}{2}+e^{1\cdot it}\cdot\frac{1}{4}+e^{2\cdot it}\cdot\frac{1}{4}=\frac{2+e^{it}+e^{2it}}{4}$$

şi

$$G_{\xi}(t)=\frac{1}{2}e^{0\cdot t}+\frac{1}{4}e^{1\cdot t}+\frac{1}{4}e^{2\cdot t}=\frac{2+e^{t}+e^{2t}}{4}.$$

Primele două derivate ale acestor funcţii sunt:

$$\varphi_{\xi}'(t)=\frac{i}{4}(e^{it}+2e^{2it}),\quad \varphi_{\xi}''(t)=-\frac{1}{4}(e^{it}+4e^{2it}),$$

$$G_{\xi}'(t)=\frac{1}{4}(e^{t}+2e^{2t}),\quad G_{\xi}''(t)=\frac{1}{4}(e^{t}+4e^{2t}).$$

Scanned with CamScanner

Obținem $\varphi_\xi^{'}(0)=\frac{3i}{4}, \varphi_\xi^{''}(0)=-\frac{5}{4}, G_\xi^{'}(0)=\frac{3}{4}, G_\xi^{''}(0)=\frac{5}{4}$, de unde

$$\alpha_1(\xi)=M(\xi)=\frac{\varphi_\xi^{'}(0)}{i}=G_\xi^{'}(0)=\frac{3}{4}$$

și

$$\alpha_2(\xi)=M(\xi^2)=\frac{\varphi_\xi^{''}(0)}{i^2}=G_\xi^{''}(0)=\frac{5}{4}.$$

b. Avem

$$\varphi_\xi(t)=\sum_{n=0}^{\infty} e^{n\cdot it}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e^{it}}{2}\right)^n=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{e^{it}}{2}}=\frac{1}{2-e^{it}}$$

și

$$G_\xi(t)=\sum_{n=0}^{\infty} e^{n\cdot t}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e^{t}}{2}\right)^n=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{e^{t}}{2}}=\frac{1}{2-e^{t}},$$

pentru $\frac{e^t}{2}<1 \Rightarrow t<\ln 2$. (Am folosit suma seriei geometrice $\sum_{n=0}^{\infty} x^n=\frac{1}{1-x}, |x|<1$). Primele două derivate ale acestor două funcții sunt:

$$\varphi_\xi^{'}(t)=\frac{ie^{it}}{(2-e^{it})^2},\quad \varphi_\xi^{''}(t)=\frac{e^{it}(2+e^{it})}{(2-e^{it})^2},$$

$$G_\xi^{'}(t)=\frac{e^{t}}{(2-e^{t})^2},\quad G_\xi^{''}(t)=\frac{e^{t}(2+e^{t})}{(2-e^{t})^2}.$$

Obținem $\varphi_\xi^{'}(0)=i, \varphi_\xi^{''}(0)=-3, G_\xi^{'}(0)=1, G_\xi^{''}(0)=3$, de unde

$$\alpha_1(\xi)=M(\xi)=\frac{\varphi_\xi^{'}(0)}{i}=G_\xi^{'}(0)=1$$

și

$$\alpha_2(\xi)=M(\xi^2)=\frac{\varphi_\xi^{''}(0)}{i^2}=G_\xi^{''}(0)=3.$$

Scanned with CamScanner

c. $$\varphi_\xi(t)=\int_{-1}^{1}e^{itx}\cdot|x|\,dx=\int_{-1}^{1}(\cos tx+i\sin tx)\cdot|x|\,dx=$$
$$=\int_{-1}^{1}\cos tx\cdot|x|\,dx+\int_{-1}^{1}\sin tx\cdot|x|\,dx=2\int_{0}^{1}x\cos tx dx$$

deoarece funcţia $\cos tx\cdot|x|$ este pară, iar $\sin tx\cdot|x|$ este impară. Astfel

$$\varphi_\xi(t)=2\int_0^1 x\cdot\left(\frac{\sin tx}{t}\right)dx=2x\frac{\sin tx}{t}\Big|_0^1-2\int_0^1\frac{\sin tx}{t}dx=$$
$$=\frac{2\sin t}{t}+2\frac{\cos tx}{t^2}\Big|_0^1=\frac{2\sin t}{t}+\frac{2\cos t}{t^2}-\frac{2}{t^2}=\frac{2(t\sin t+\cos t-1)}{t^2},$$

$$G_\xi(t)=\int_{-1}^{1}e^{tx}\cdot|x|dx=\int_{-1}^{0}e^{tx}\cdot(-x)dx+\int_0^1 e^{tx}\cdot xdx=$$
$$=-\frac{xe^{tx}}{t}\Big|_{-1}^{0}+\int_{-1}^{0}\frac{e^{tx}}{t}dx+\frac{xe^{tx}}{t}\Big|_0^1-\int_0^1\frac{e^{tx}}{t}dx=$$
$$=-\frac{e^{-t}}{t}+\frac{e^{tx}}{t^2}\Big|_{-1}^{0}+\frac{e^t}{t}-\frac{e^{tx}}{t^2}\Big|_0^1=$$
$$=-\frac{e^{-t}}{t}+\frac{1}{t^2}-\frac{e^{-t}}{t^2}+\frac{e^t}{t}-\frac{e^t}{t^2}+\frac{1}{t^2}=\frac{1}{t^2}(te^t-e^t-te^{-t}-e^{-t}+2).$$

Avem

$$\varphi_\xi^{'}(t)=\frac{2t^2\cos t-4t\sin t-4\cos t+4}{t^3}$$

şi

$$G_\xi^{'}(t)=\frac{t^2(e^t+e^{-t})-2t(2^t-e^{-t})+2(e^t+e^{-t})-4}{t^3},$$

de unde

$$\alpha_1=\lim_{t\to 0}\frac{\varphi_\xi^{'}(t)}{i}=\lim_{t\to 0}G_\xi^{'}(t)=0.$$

c. $$\varphi_\xi(t)=\int_0^\infty e^{itx}\cdot e^{-x}dx=\int_0^\infty(\cos tx+i\sin tx)\cdot e^{-x}dx=$$
$$=\int_0^\infty\cos tx\cdot e^{-x}dx+i\int_0^\infty\sin tx\cdot e^{-x}dx=A+iB$$

Scanned with CamScanner

$$A=\int_0^\infty \cos tx\cdot e^{-x}dx=\int_0^\infty \cos tx\cdot(-e^{-x})'dx=$$

$$=-\cos tx\cdot e^{-x}\Big|_0^\infty-\int_0^\infty t\sin tx\cdot e^{-x}dx=1-tB,$$

$$B=\int_0^\infty \sin tx\cdot(-e^{-x})dx=-\sin tx\cdot e^{-x}\Big|_0^\infty+\int_0^\infty t\cos tx\cdot e^{-x}dx=tA.$$

Obținem $A=1-t^2A$, adică $A=\dfrac{1}{1+t^2}$ și $B=\dfrac{t}{1+t^2}$.

Astfel $\varphi_\xi(t)=\dfrac{1+it}{1+t^2}$.

Apoi $G_\xi(t)=\int_0^\infty e^{tx}e^{-x}dx=\int_0^\infty e^{x(t-1)}dx=\dfrac{e^{x(t-1)}}{t-1}\Big|_0^\infty=\dfrac{1}{1-t}, t<1.$

Primele două derivate sunt

$$\varphi_\xi'(t)=\frac{i-2t-it^2}{(1+t^2)^4},\quad \varphi_\xi''(t)=\frac{6it^3+14t^2-10it-2}{(1+t^2)^5},$$

$$G_\xi'(t)=\frac{1}{(1-t)^2},\quad G_\xi''(t)=\frac{2}{(1-t)^3}.$$

Obținem

$$\alpha_1(\xi)=M(\xi)=\frac{\varphi_\xi'(0)}{i}=G_\xi'(0)=1$$

și

$$\alpha_2(\xi)=M(\xi^2)=\frac{\varphi_\xi''(0)}{i^2}=G_\xi''(0)=2.$$

2. *Să se determine funcțiile de repartiție corespunzătoare următoarelor funcții caracteristice:*

a. $\varphi_\xi(t)=\dfrac{2e^{it}+e^{-it}+3}{6}$;

b. $\varphi_\xi(t)=\cos t$;

c. $\varphi_\xi(t)=e^{-|t|}$.

Scanned with CamScanner

Rezolvare:

a. Observăm că putem scrie $\varphi_\xi(t) = \frac{1}{3}e^{1\cdot i\cdot t} + \frac{1}{6}e^{-1\cdot i\cdot t} + \frac{1}{2}e^{0\cdot i\cdot t}$, adică $\varphi_\xi(t)$ este funcția caracteristică a variabilei aleatoare discrete $\xi:\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$. Cum funcția de repartiție este unic determinată de funcția caracteristică, rezultă că aceasta este repartiția căutată, deci

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ \frac{1}{6}, & -1 < x \le 0 \\ \frac{2}{3}, & 0 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

b. Deoarece $e^{it} = \cos t + i \sin t$ și $e^{-it} = \cos t - i \sin t$, rezultă $\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$. Astfel

$$\varphi_\xi(t) = \frac{1}{2}e^{1\cdot i\cdot t} + \frac{1}{2}e^{-1\cdot i\cdot t},$$

deci φ_ξ este funcția caracteristică a repartiției $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. Așadar

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ \frac{1}{2}, & -1 < x \le 1. \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

c. Formula de inversiune se scrie astfel

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}e^{-itx}dx = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{t}e^{-itx}dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-t}e^{-itx}dt\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{t}(\cos tx - i\sin tx)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-t}(\cos tx - i\sin tx)dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-t}(\cos tx + i\sin tx)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-t}(\cos tx - i\sin tx)dt =$$

Scanned with CamScanner

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-t}\cos tx dt=\frac{1}{\pi}\left[-e^{-t}\cos tx\Big|_0^\infty - x\int_0^\infty e^{-t}\sin tx dt\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[1-x\left(-\sin tx\cdot e^{-t}\Big|_0^\infty + x\int_0^\infty \cos tx\cdot e^{-t}dt\right)\right]=\frac{1}{\pi}(1-x^2\pi f(x)).$$

Prin urmare $f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$.

16.3. Exerciții propuse

1. *Calculați funcția generatoare de momente și funcția caracteristică pentru fiecare din variabilele aleatoare:*

a. $\xi:\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 2\\ 1/4 & 1/2 & 1/8 & 1/8\end{pmatrix}$;

b. $\xi:\begin{pmatrix}-2 & -1 & 0 & 1 & 2\\ 3/8 & 1/8 & 1/4 & 1/8 & 1/8\end{pmatrix}$;

c. $\xi:\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & \dots & n & \dots\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 & \dots & \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n & \dots\end{pmatrix}$;

d. $\xi:\begin{pmatrix}0 & 1 & \dots & k & \dots & n\\ \frac{C_n^0}{2^n} & \frac{C_n^1}{2^n} & \dots & \frac{C_n^k}{2^n} & \dots & \frac{C_n^n}{2^n}\end{pmatrix}$;

e. $\xi:\begin{pmatrix}0 & 1 & \dots & n & \dots\\ \frac{1}{e} & \frac{1}{e} & \dots & \frac{1}{e\cdot n!} & \dots\end{pmatrix}$;

f. $\xi:\begin{pmatrix}x\\ 2x\end{pmatrix}, x\in[0,1]$;

g. $\xi:\begin{pmatrix}x\\ e^{-(x-5)}\end{pmatrix}, x\in[5,\infty)$;

Scanned with CamScanner

h. $\xi: \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}} \end{pmatrix}, x \in [0,\infty)$.

2. *Să se calculeze funcția caracteristică și funcția generatoare de momente pentru variabilele următoare și să se calculeze apoi* α_1 *și* α_2.

a. $\xi: \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n & \dots \\ e^{-2} & 2e^{-2} & \dots & \frac{2^n}{n!}e^{-2} & \dots \end{pmatrix}$; b. $\xi: \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n & \dots \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{9} & \dots & \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} & \dots \end{pmatrix}$.

3. *Se dau următoarele funcții caracteristice:*

a. $\frac{1}{4}(1+e^{it})^2$; b. $\frac{1}{2}\left(1-\frac{e^{it}}{2}\right)^{-1}$; c. $\cos^2 t$; d. e^{-t^2}.

Să se determine repartițiile corespunzătoare.

16.4. Indicații și răspunsuri

1. **a.** $\varphi_\xi(t) = \frac{1}{4}e^{-it} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}e^{it} + \frac{1}{8}e^{2it}$, $G_\xi(t) = \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}e^{t} + \frac{1}{8}e^{2t}$;

b. $\varphi_\xi(t) = \frac{3}{8}e^{-2it} + \frac{1}{8}e^{-it} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}e^{it} + \frac{1}{8}e^{2it}$,

$G_\xi(t) = \frac{3}{8}e^{-2t} + \frac{1}{8}e^{-t} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}e^{t} + \frac{1}{8}e^{2t}$;

c. $\varphi_\xi(t) = \frac{1}{3-2e^{it}}$, $G_\xi(t) = \frac{1}{3-2e^{t}}$;

d. $\varphi_\xi(t) = \left(\frac{1+e^{it}}{2}\right)^n$, $G_\xi(t) = \left(\frac{1+e^{t}}{2}\right)^n$;

e. $\varphi_\xi(t) = e^{e^{it}-1}$, $G_\xi(t) = e^{e^{t}-1}$;

f. $\varphi_\xi(t) = \frac{2-2ix}{t^2}e^{itx}$, $G_\xi(t) = \frac{2}{t^2}(te^t - e^t + 2)$;

Scanned with CamScanner

g. $\varphi_\xi(t) = \frac{1}{1-5it}, G_\xi(t) = \frac{1}{1-5t}$.

2. a. $\varphi_\xi(t) = e^{2(e^{it}-1)}, G_\xi(t) = e^{2(e^t-1)}, \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 6$;

b. $\varphi_\xi(t) = \frac{2e^{it}}{3-e^{it}}, G_\xi(t) = \frac{2e^t}{3-e^t}, \alpha_1 = \frac{3}{2}, \alpha_2 = 3$.

3. a. $\xi: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$;

b. $\xi: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \frac{1}{2^4} & \dots \end{pmatrix}$;

c. $\xi: \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$;

d. $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}}$.

Scanned with CamScanner

17. REPARTIȚII CLASICE

17.1. Considerații teoretice

A. REPARTIȚII DISCRETE

Definiția 1. Spunem că variabila aleatoare discretă ξ ***urmează o lege de repartiție uniformă*** dacă are forma $\xi:\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 1/n & 1/n & \dots & 1/n \end{pmatrix}$.

Teorema 1. *Dacă ξ este o variabilă aleatoare repartizată uniform atunci*

$$M(\xi)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k,\ D^2(\xi)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2,$$

$$\varphi(\xi)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{itx_k},\ G_\xi(t)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{tx_k}.$$

Definiția 2. Spunem că variabila aleatoare ξ ***urmează o lege de repartiție binomială*** dacă are forma

$$\xi:\begin{pmatrix} k \\ C_n^k p^k q^{n-k} \end{pmatrix}, 0\le k\le n,\ p,q>0,\ p+q=1.$$

Teorema 2. *Dacă ξ este o variabilă aleatoare repartizată binomial atunci* $M(\xi)=np$, $D^2(\xi)=npq$, $\varphi_\xi(t)=(pe^{it}+q)^n$, $G_\xi(t)=(pe^t+q)^n$.

Definiția 3. Spunem că variabila aleatoare ξ ***urmează o lege de repartiție hipergeometrică*** dacă are forma

$$\xi:\begin{pmatrix} k \\ \dfrac{C_{N_1}^k C_{N_2}^k}{C_N^n} \end{pmatrix}, 0\le k\le n\le N,\ k\le N_1,\ n-k\le N_2,\ N_1+N_2=N.$$

Scanned with CamScanner

Teorema 3. *Dacă* ξ *este o variabilă aleatoare repartizată hipergeometric atunci* $M(\xi)=\frac{nN_1}{N}$, $D^2(\xi)=\frac{nN_1(N_1-n)(N-N_1)}{N^2(N-1)}$.

Definiția 4. Spunem că variabila aleatoare ξ ***urmează o lege de repartiție geometrică*** dacă are forma

$$\xi:\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n & \dots \\ p & pq & \dots & pq^2 & \dots \end{pmatrix},\ p,q>0,\ p+q=1.$$

Teorema 4. *Dacă* ξ *este o variantă aleatoare repartizată geometric atunci*

$$M(\xi)=\frac{p}{q},\ D^2(\xi)=\frac{q}{p^2},$$

$$\varphi_\xi(t)=\frac{p}{1-qe^{it}},\ G_\xi(t)=\frac{p}{1-qe^{t}},\ 0<qe^t<1$$

Definiția 5. Spunem că variabila aleatoare ξ ***urmează o lege de repartiție Poisson*** dacă are forma

$$\xi:\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n & \dots \\ e^{-\lambda} & \lambda e^{-\lambda} & \dots & \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} & \dots \end{pmatrix},\lambda>0.$$

Teorema 5. *Dacă* ξ *este o variabilă aleatoare repartizată Poisson atunci*

$$M(\xi)=\lambda,\ D^2(\xi)=\lambda,\ \varphi_\xi(t)=e^{\lambda(e^{it}-1)},\ G_\xi(t)=e^{\lambda(e^t-1)}.$$

B. REPARTIȚII CONTINUE

Definiția 1. Spunem că variabila aleatoare continuă ***urmează o lege de repartiție uniformă*** de parametri a și b dacă are forma

$$\xi:\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}, f(x)=\begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x\in[a,b] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}.$$

Teorema 1. *Dacă* ξ *este o variabilă aleatoare continuă repartizată uniform, atunci*

Scanned with CamScanner

$$M(\xi)=\frac{a+b}{2},\ D^2(\xi)=\frac{(a-b)^2}{12},$$

$$\varphi_\xi(t)=\begin{cases}\dfrac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}, & t\neq 0\\ 1, & t=0\end{cases},\ G_\xi(t)=\begin{cases}\dfrac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}, & t\neq 0\\ 1, & t=0\end{cases}.$$

Definiția 2. Spunem că o variabilă aleatoare ξ ***urmează o lege de repartiție exponențială*** de parametru $\lambda>0$ dacă are forma

$$\xi:\begin{pmatrix}x\\ f(x)\end{pmatrix},\ f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}.$$

Teorema 2. *Dacă ξ este o variabilă aleatoare repartizată exponențial, atunci*

$$M(\xi)=\frac{1}{\lambda},\ D^2(\xi)=\frac{1}{\lambda^2},\ \varphi_\xi(t)=\frac{\lambda}{\lambda-it},\ G_\xi(t)=\frac{\lambda}{\lambda-t},\ \lambda>t.$$

Definiția 3. Spunem că o variabilă aleatoare ξ ***urmează o lege de repartiție normală*** de parametri m și σ și notăm $\xi\in N(m,\sigma)$ dacă are forma

$$\xi:\begin{pmatrix}x\\ f(x)\end{pmatrix},\ f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},\ m\in\mathbb{R},\sigma>0.$$

Teorema 3. *Dacă ξ este o variabilă aleatoare repartizată normal, atunci*

$$M(\xi)=m,\ D^2(\xi)=\sigma^2,\ \varphi_\xi(t)=e^{imt-\frac{\sigma^2t^2}{2}},$$

$$\mu_{2r}=\frac{(2r)!}{r!2^r}\sigma^{2r},\ \mu_{2r+1}=0,\ A=E=0.$$

Definiția 4. Funcția $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ se numește ***funcția integrală a lui Laplace***.

Teorema 4. *Funcția lui Laplace are proprietățile:*

1. $\Phi(0)=0$;

Scanned with CamScanner

2. $\Phi(\infty)=\frac{1}{2}=-\Phi(-\infty)$;

3. $\Phi(-z)=-\Phi(z)$.

Teorema 5. *Dacă* $\xi \in N(m,\sigma)$ *atunci* $\eta=\frac{\xi-m}{\sigma}\in N(0,1)$.

Teorema 6. *Dacă* $\xi \in N(m,\sigma)$ *atunci*

$$P(a\le\xi\le b)=\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right).$$

Teorema 7. *Dacă* ξ *este o variabilă aleatoare repartizată binomial de parametri n şi p, atunci când n tinde la infinit variabila aleatoare redusă* $\eta=\frac{\xi-np}{\sqrt{npq}}$ *urmează o repartiţie N(0,1).*

Teorema 8. *Dacă* ξ *este o variabilă aleatoare repartizată Poisson de parametru* $\lambda>0$*, atunci când n tinde la infinit variabila aleatoare redusă* $\eta=\frac{\xi-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$ *urmează o repartiţie N(0,1).*

17.2. Exerciţii rezolvate

1. *Să se determine constanta k şi să se calculeze media şi dispersia pentru următoarele variabile aleatoare:*

a. $\xi:\begin{pmatrix}0 & 1 & \dots & n & \dots\\ k & k\ln\theta & \dots & k\frac{(\ln\theta)^n}{n!} & \dots\end{pmatrix},\theta>1$;

b. $\xi:\begin{pmatrix}x\\ f(x)\end{pmatrix}, f(x)=\frac{k}{a^2+x^2}, a>0$;

c. $\xi:\begin{pmatrix}x\\ f(x)\end{pmatrix}, f(x)=kx^{p-1}e^{-x}, x\ge 0, p>0$.

Scanned with CamScanner

Rezolvare:

a. Avem $\sum_{n=0}^{\infty} k\frac{(\ln\theta)^n}{n!} = 1$, adică $ke^{\ln\theta} = 1, \left(e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)$ sau $k = \frac{1}{\theta}$.

Atunci

$$M(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} n\cdot\frac{1}{\theta}\cdot\frac{(\ln\theta)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\theta}\cdot\frac{(\ln\theta)^n}{(n-1)!} = \frac{\ln\theta}{\theta}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln\theta)^{n-1}}{(n-1)!} =$$

$$= \frac{\ln\theta}{\theta}e^{\ln\theta} = \ln\theta,$$

$$M(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2\cdot\frac{1}{\theta}\cdot\frac{(\ln\theta)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\frac{1}{\theta}\cdot\frac{(\ln\theta)^n}{(n-1)!} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}[(n-1)+1]\cdot\frac{(\ln\theta)^n}{\theta(n-1)!} = \frac{(\ln\theta)^2}{\theta}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\ln\theta)^{n-2}}{(n-2)!} +$$

$$+ \frac{\ln\theta}{\theta}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln\theta)^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(\ln\theta)^2}{\theta}\theta + \frac{\ln\theta}{\theta}\theta = \ln^2\theta + \ln\theta,$$

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - M(\xi)^2 = \ln\theta.$$

Altfel, ξ este o variabilă aleatoare Poisson de parametru $\ln\theta$, deci $M(\xi)=D^2(\xi)=\ln\theta$.

b. Avem $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, adică $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{k}{a^2+x^2}dx = 1$ sau $\frac{k}{a}\cdot arctg\frac{x}{a}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1$,

de unde $\frac{k}{a}\pi = 1$.

Rezultă $k = \frac{a}{\pi}$. Astfel $M(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\frac{a}{a^2+x^2}dx$, integrală divergentă ($\lim_{x\to\infty} x^p f(x) = \frac{a}{\pi}$ pentru p=1). Deci nu există (nu are sens) $M(\xi)$ şi evident nici $D^2(\xi)$.

Scanned with CamScanner

c. Avem $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, adică $\int_{0}^{+\infty} kx^{p-1}e^{-x}dx = 1$ sau $k\Gamma(p) = 1$.

Rezultă $k = \frac{1}{\Gamma(p)}$. Astfel

$$M(\xi) = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^{+\infty} x \cdot x^{p-1}e^{-x}dx = \frac{1}{\Gamma(p)}\Gamma(p+1) = p,$$

$$M(\xi^2) = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^{+\infty} x^2 \cdot x^{p-1}e^{-x}dx = \frac{1}{\Gamma(p)}\Gamma(p+2) = p(p+1),$$

de unde

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - M(\xi)^2 = p.$$

2. ***Fie ξ şi η două variabile aleatoare independente urmând fiecare o lege normală de parametri 0 şi 1. Să se determine raza cercului cu centrul în origine astfel încât $P((\xi,\eta)\in C(O,R))=0,95$.***

Rezolvare:

Densitatea de repartiție a vectorului aleator (ξ,η) este

$$f(x,y) = f_\xi(x)\cdot f_\eta(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}} = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},$$

iar

$$P((\xi,\eta)\in C(O,R)) = 0,95 = \frac{1}{2\pi}\iint_{x^2+y^2\le R^2} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dxdy.$$

Trecând la coordonate polare $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$, obținem

$$P((\xi,\eta)\in C(O,R)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R \rho\cdot e^{-\frac{\rho^2}{2}}d\rho d\theta = \int_0^R \rho\cdot e^{-\frac{\rho^2}{2}}d\rho = 1 - e^{-\frac{R^2}{2}}.$$

Din condiția pusă, rezultă

$$e^{-\frac{R^2}{2}} = 0,05 \Rightarrow e^{\frac{R^2}{2}} = 20 \Rightarrow R = \sqrt{2\ln 20} \cong 2,45.$$

Scanned with CamScanner

3. *Aplicând inegalitatea lui Cebâşev să se găsească limita inferioară a probabilităţii inegalităţii* $\left|\frac{\xi}{10^5}-\frac{1}{6}\right|<\frac{1}{100}$ *unde* ξ *reprezintă numărul de apariţii ale feţei 5 în 100000 aruncări de zar.*

Rezolvare:

α este o variabilă aleatoare binomială de parametri 10^5 şi 1/6, deci $M(\xi)=\frac{10^5}{6}$ şi $D^2(\xi)=10^5\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5\cdot 10^5}{36}$. Aplicând inegalitatea lui Cebâşev, găsim

$$P(|\xi-M(\xi)|<\varepsilon)\geq 1-\frac{D^2(\xi)}{\varepsilon^2},$$

$$P\left(\left|\xi-\frac{10^5}{6}\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{5\cdot 10^5}{36\varepsilon^2},$$

sau

$$P\left(\left|\frac{\xi}{10^5}-\frac{1}{6}\right|<\frac{\varepsilon}{10^5}\right)\geq 1-\frac{5\cdot 10^5}{36\varepsilon^2}.$$

Pentru $\frac{\varepsilon}{10^5}=\frac{1}{100}$, avem ε=1000, astfel că

$$P\left(\left|\frac{\xi}{10^5}-\frac{1}{6}\right|<\frac{1}{100}\right)\geq 1-\frac{5\cdot 10^5}{36\cdot 10^6}=1-\frac{5}{360}=1-\frac{1}{72}=\frac{71}{72}$$

4. *Cu ce probabilitate putem afirma că din 100 de aruncări ale unei monede, stema apare de un număr de ori cuprins între 40 şi 60?* ($\Phi(2)$=0,4772).

Rezolvare:

În aplicaţii, repartiţiile binomiale şi Poisson se asimilează unei repartiţii normale dacă pentru repartiţia binomială $n\geq 50$ şi $np\geq 18$, iar pentru repartiţia Poisson $\lambda\geq 19$. În cazul nostru variabila aleatoare ξ ce reprezintă numărul de apariţii ale stemei în 100 de aruncări, este binomială de parametri 100 şi 1/2.

Astfel $M(\xi)=np=100\cdot\frac{1}{2}=50,\ D^2(\xi)=npq=25$. Prin urmare, cum $n\geq 50$, $np\geq 18$, vom avea

Scanned with CamScanner

$$P\left(a \le \frac{\xi - 50}{\sqrt{25}} \le b\right) \cong \Phi(b) - \Phi(a)$$

sau

$$P(5a + 50 \le \xi \le 5b + 50) \cong \Phi(b) - \Phi(a) .$$

Luând a= -2 şi b=2, obţinem

$$P(40 \le \xi \le 60) \cong \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) = 2 \cdot 0{,}4772 = 0{,}9544 .$$

17.3. Exerciţii propuse

1. *Să se calculeze media şi dispersia următoarelor variabile aleatoare:*

a. $\xi : \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n & \dots \\ k & k/\lambda & \dots & k/\lambda^n \cdot n! & \dots \end{pmatrix}, \lambda > 0;$

b. $\xi : \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}, f(x) = kx^{p-1}(1-x)^{q-1}, x \in [0,1], p, q > 0;$

c. $\xi : \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}, f(x) = k(x-1)^2 e^{-(x-1)^3}, x \ge 1;$

d. $\xi : \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}, f(x) = k\sqrt{x}e^{-\frac{x}{2}}, x \ge 0.$

2. *Să se determine valoarea medie şi dispersia unei variabile aleatoare* ξ *repartizată uniform în intervalul* (2-l,2+l).

3. *Valoarea medie şi dispersia unei variabile aleatoare* ξ *repartizată normal sunt respectiv 14 şi 9. Să se determine probabilitatea ca în urma unei probe,* ξ *să ia o valoare în intervalul* (17,20). ($\Phi(2)$=0,4775; $\Phi(1)$=0,3143).

4. *Se aruncă un zar de 500 de ori. Cu ce probabilitate putem afirma că obţinem faţa 6 de cel mult 90 de ori*? ($\Phi(0{,}8)$=0,288).

Scanned with CamScanner

5. *Se aruncă de 360 de ori cu o pereche de zaruri. Cu ce probabilitate ne putem aştepta ca să apară 12 puncte de un număr de ori cuprins între 8 şi 12?* ($\Phi(0{,}641)=0{,}2389$).

6. *De câte ori este suficient să aruncăm un zar, pentru ca, cu o probabilitate de 0,99 să putem afirma că faţa 6 apare cu o frecvenţă cuprinsă între* $\frac{1}{6}-0{,}05$ *şi* $\frac{1}{6}+0{,}05$? ($\Phi(2{,}57)=0{,}495$).

17.4. Indicaţii şi răspunsuri:

1. **a.** $k=e^{-\frac{1}{\lambda}}$, $M(\xi)=D^2(\xi)=\frac{1}{\lambda}$, variabilă aleatoare Poisson;

   b. $k=\frac{1}{B(p,q)}$, $M(\xi)=\frac{p}{p+q}$, $D^2(\xi)=\frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}$;

   c. $k=3$, $M(\xi)=1+\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$, $D^2(\xi)=1+\frac{2}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{2}{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)$

   d. $k=\frac{1}{2\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}$, $M(\xi)=3$, $D^2(\xi)=6$.

2. $M(\xi)=2$, $D^2(\xi)=\frac{l^2}{3}$.

3. $P(a<\xi<b)=\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$,

   $P(17<\xi<20)=\Phi(2)-\Phi(1)=0{,}1629$.

4. $p=0{,}788$.

5. $p=0{,}48$.

6. $n=368$.

Scanned with CamScanner

BIBLIOGRAFIE

1. **Atanasiu Gh., Munteanu Gh., Postolache M.** - *Algebră liniară, Geometrie analitică şi diferenţială, ecuaţii diferenţiale. Culegere de probleme*, Grupul Editorial All, Bucureşti, 1998

2. **Chiriţă S.** - *Probleme de matematici superioare*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1989

3. **Ciucu G., Craiu V., Săcuiu I.** - *Culegere de probleme de teoria probabilităţilor*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1967

4. **Donciu N., Flondor D.** - *Algebră şi analiză matematică. Culegere de probleme,vol. 1,* 2, Editura Didactică şi Pedagogică, 1998 şi 1999

5. **Olariu V., Stănăşilă T.** - *Ecuaţii diferenţiale şi cu derivate parţiale*, Bucureşti, EdituraTehnică, 1982

6. **Orman V. Gabriel** - *Capitole de matematici aplicate*, Cluj-Napoca, Editura Albastră, 1999

7. **Orman V. Gabriel** - *Măsura şi procese aleatoare*, Editura Universităţii Transilvania, Braşov, 2000

8. **Popescu O.** (coordonator) - *Matematici aplicate în economie, vol 1,2*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1993

9. **Purcaru I.** - *Matematici generale şi elemente de optimizare*, Editura Economică, Bucureşti, 1997

10. **Radomir I., Fulga A.** - *Analiză matematică. Culegere de probleme*, Editura Albastră, Cluj-Napoca, 2000

11. **Radomir I.** - *Matematică. Elemente de algebră vectorială, geometrie şi calcul diferenţial*, Editura Albastră, Cluj-Napoca, 2000

12. **Radomir I.** - *Matematică. Elemente de calcul integral şi ecuaţii diferenţiale*, Editura Albastră, Cluj-Napoca, 2000

13. **Radomir I., Ovesea H.** - *Matematici speciale*, Editura Albastră, Cluj-Napoca, 2001

14. **Trandafir R.** - *Introducere în teoria probabilităţilor*, Editura Albatros, 1979

Scanned with CamScanner